CAFE-S - Limites et continuité

Axel CAULIER, Charlène MICHELOT, Marie YAZIJI

Mercredi 13 septembre 2023

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

Sommaire

Exemple introductif

Parfois, il peut être utile de s'intéresser aux valeurs que prennent une fonction $x \mapsto f(x)$ lorsque x est proche d'un nombre réel a, mais pas nécessairement égal à a. Considérons comme illustration la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^3 - 2x^2}{3x - 6}$. Le tableau suivant donne des valeurs de $f(x)$ pour x proche de 2.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
1.9	1.20333333	2.1	1.47000000
1.99	1.32003333	2.01	1.34670000
1.999	1.33200033	2.001	1.33466700
1.9999	1.33320000	2.0001	1.33346667
1.99999	1.33332000	2.00001	1.33334667
1.999999	1.33333200	2.000001	1.33333467

Exemple introductif

Il semble que nous puissions prendre des valeurs de $f(x)$ arbitrairement proches de $4/3$ en choisissant x suffisamment proche de 2. On peut expliciter cela davantage en factorisant $f(x)$:
$f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{3x-6} = \dfrac{x^2(x-2)}{3(x-2)}$. Ainsi, pour $x \neq 2$, $f(x) = x^2/3$.

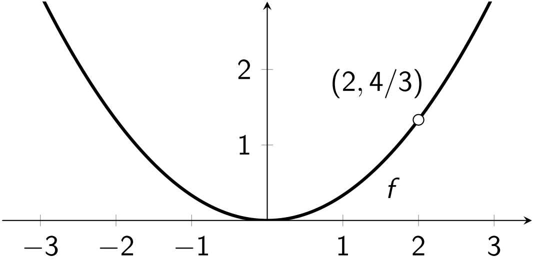


Figure – Graphe de la fonction $x \mapsto \dfrac{x^3 - 2x^2}{3x-6}$

Définition intuitive de la limite

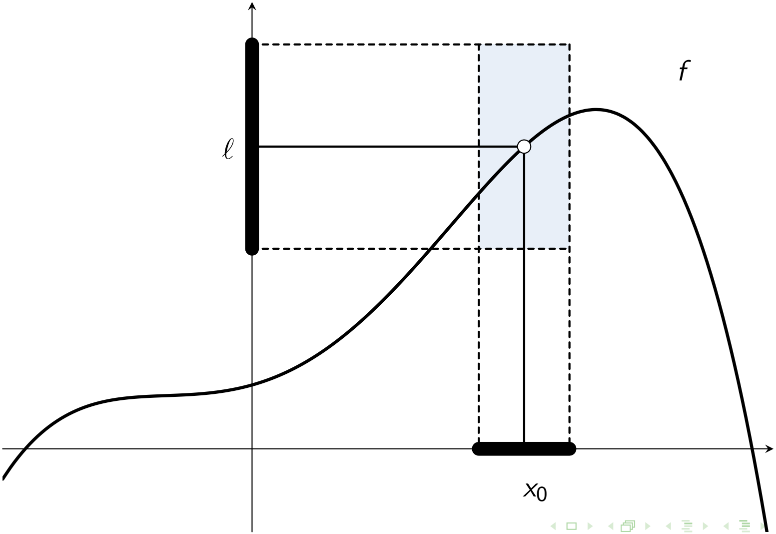
Définition

*Soient $\ell \in \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ **tend vers ℓ en** x_0 si $f(x)$ est arbitrairement proche de ℓ dès que $x \in E$ est suffisamment proche de x_0, mais non égal à x_0. Dans ce cas, on écrit*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$$

*et on dit que ℓ est la **limite** de $f(x)$ lorsque x tend vers x_0.*

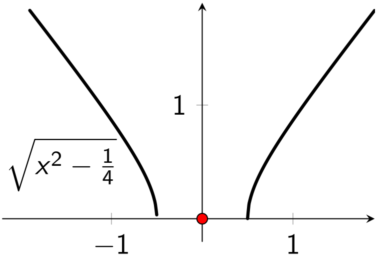
Définition intuitive de la limite

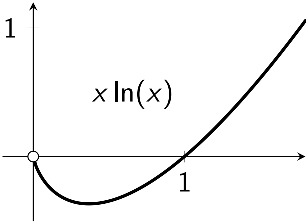


Définition intuitive de la limite

Remarque

Pour une fonction $f : E \to \mathbb{R}$, la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $x_0 \in \mathbb{R}$ peut exister seulement si x_0 est dans la frontière de E ou si $x_0 \in E$.





Définition intuitive de la limite

Remarque

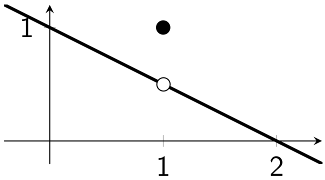
Même lorsque $x_0 \in E$, ni l'existence ni la valeur de la limite ne dépendent de la valeur de $f(x_0)$.

Considérons la fonction

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 1 - x/2 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

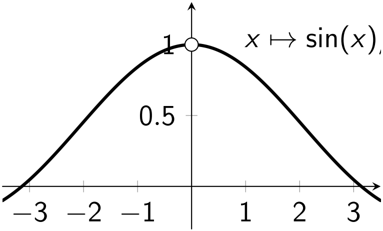
Même si $f(1) = 1$, on a

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1/2$$



Exemple : $x \mapsto \sin(x)/x$

x	$\sin(x)/x$
± 1	0.841470985
± 0.1	0.998334166
$\pm 10^{-2}$	0.999983333
$\pm 10^{-3}$	0.999999833



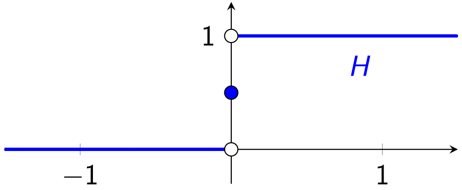
Conjecture

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Exemple : fonction de Heaviside

La fonction de Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est définie de la manière suivante :

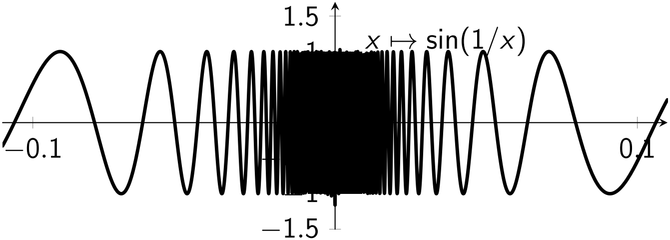
$$\forall x \in \mathbb{R}, \ H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$



Affirmation : la limite de $H(x)$ lorsque x tend vers 0 n'existe pas.

Exemple : $x \mapsto \sin(1/x)$

On représente ici le graphe de la fonction $x \mapsto \sin(1/x)$ définie pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:

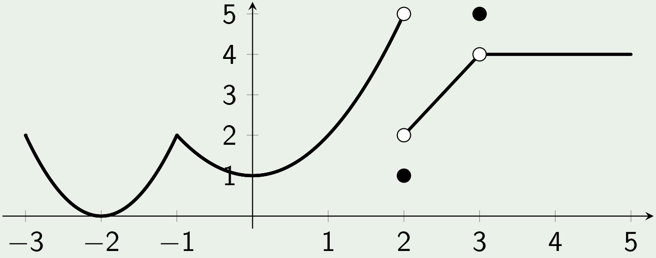


On a $\sin(\frac{1}{x}) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3/2+2\pi k}, k \in \mathbb{Z}$ et $\sin(\frac{1}{x}) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{1/2+2\pi k}$. Ainsi, comme $\sin(\frac{1}{x})$ n'approche pas une valeur spécifique lorsque $x \to 0$, $\lim_{x\to 2} \sin(\frac{1}{x})$ n'existe pas.

Approche graphique de la notion de limites

Exercice

Soit $f : [-3,5] \to \mathbb{R}$ *une fonction dont le graphe est représenté ci-dessous :*



À la lecture du graphique, déterminer (1) $\lim_{x\to -1} f(x)$, *(2)* $f(2)$, *(3)* $\lim_{x\to 2} f(x)$, *(4)* $f(3)$, *(5)* $\lim_{x\to 2} f(x)$.

Limites de fonction élémentaires

Proposition (★)

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. *Alors*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$$

$$\lim_{x \to x_0} \sin(x) = \sin(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \cos(x) = \cos(x_0)$$

$$\forall a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}, \lim_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$$

Si $x_0 \geq 0$, *alors* $\lim_{x \to x_0} x^r = x_0^r, \forall r \geq 0$ *et si* $x_0 > 0$, *alors* $\lim_{x \to x_0} \log_a(x) = \log_a(x_0)$, $\forall a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$.

Sans preuve.

Propriétés des limites

Proposition $(*)$

Soient f et g des fonctions dont la limite en $x_0 \in \mathbb{R}$ existe et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

1. $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x)$
2. $\lim_{x \to x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$
3. $\lim_{x \to x_0} (\lambda f(x)) = \lambda \lim_{x \to x_0} f(x)$
4. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$ *si* $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$.

Sans preuve.

Calcul de limites : exemples

Exemple

les deux propositions impliquent que pour une fonction polynomiale $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\lim_{x\to x_0} p(x) = p(x_0)$. *En effet, pour* $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, *on peut écrire :*

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} p(x) &= \lim_{x\to x_0}(\lambda_n x^n + \lambda_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \lambda_1 x + \lambda_0) \\
&= \lim_{x\to x_0}(\lambda_n x^n) + \ldots + \lim_{x\to x_0}(\lambda_1 x) + \lim_{x\to x_0} \lambda_0 \\
&= \lambda_n \lim_{x\to x_0} x^n + \ldots + \lambda_1 \lim_{x\to x_0} x + \lambda_0 \\
&= \lambda_n x_0^n + \lambda_{n-1}x_0^{n-1} + \ldots + \lambda_1 x_0 + \lambda_0 \\
&= p(x_0).
\end{aligned}$$

Calcul de limites : exemples

Exemple

Pour $x_0 \neq \pi/2 \mod \pi$,

$$\lim_{x \to x_0} \tan(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} \sin(x)}{\lim_{x \to x_0} \cos(x)} = \frac{\sin(x_0)}{\cos(x_0)} = \tan(x_0).$$

Exemple

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2x^2}{3x - 6} = \lim_{x \to 2} \left(\frac{1}{3} x^2 \right) \lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x-2} = 4/3.$$

Exemple

$$\lim_{x \to 9} \frac{x-9}{\sqrt{x} - 3} = \lim_{x \to 9} \left(\frac{x-9}{\sqrt{x}-3} \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} \right) = \lim_{x \to 9} \frac{(x-9)(\sqrt{x}+3)}{x-9} = 6.$$

Calculs de limites : exercices

En utilisant les propriétés des limites, calculer les limites suivantes si elles existent.

Exercice

1. $\lim_{x \to \sqrt{2}} 15$
2. $\lim_{x \to -2} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^3 - 2x + 7}$
3. $\lim_{x \to 3} (3x - 9)^{1000}$
4. $\lim_{x \to -3} \frac{x + 3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{3}}$
5. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 5x + 6}$
6. $\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{x^3 - 8}$
7. $\lim_{x \to 16} \frac{x - 16}{\sqrt{x} - 4}$
8. $\lim_{h \to 0} \frac{4 - \sqrt{16 + h}}{h}$
9. $\lim_{h \to 0} \left(\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1 + h}} - 1\right)$
10. $\lim_{x \to 0} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

Calculs de limites : corrections

Exercice

1. $\displaystyle\lim_{x\to\sqrt{2}} 15 = 15$
2. $\displaystyle\lim_{x\to-2} \frac{2x^2+5x-3}{3x^3-2x+7} = 5/13$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 3} (3x-9)^{1000} = 0$
4. $\displaystyle\lim_{x\to-3} \frac{x+3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{3}} = -9$
5. $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6} = 2/5$
6. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^3-8} = 1/12$
7. $\displaystyle\lim_{x\to 16} \frac{x-16}{\sqrt{x}-4} = 8$
8. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{4-\sqrt{16+h}}{h} = -1/8$
9. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+h}}-1\right) = -1/2$
10. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ *n'existe pas.*

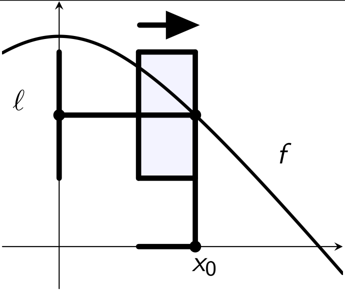
Définitions intuitive

Définition

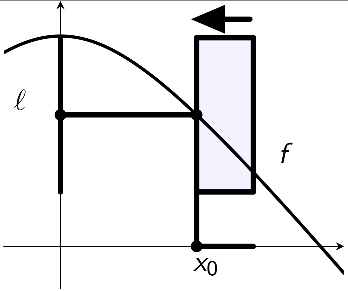
Soient $\ell \in \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f : E \to R$.

- *f tend vers ℓ en x_0 par la gauche si $f(x)$ est arbitrairement proche de ℓ dès que $x \in E$ est suffisamment proche de x_0 et $x < x_0$. Dans ce cas, on écrit $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$ et on dit que ℓ est la **limite à gauche** de f en x_0.*
- *f tend vers ℓ en x_0 par la droite si $f(x)$ est arbitrairement proche de ℓ dès que $x \in E$ est suffisamment proche de x_0 et $x > x_0$. Dans ce cas, on écrit $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$ et on dit que ℓ est la **limite à droite** de f en x_0.*

Définitions intuitives

Notation	Sens intuitif	Interprétation graphique
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$	On peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de ℓ en choisissant x suffisamment proche de x_0 avec $x < x_0$.	

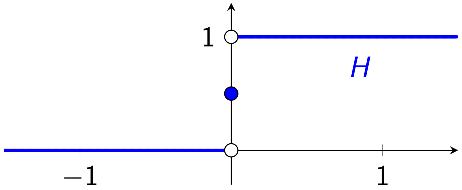
Définitions intuitives

Notation	Sens intuitif	Interprétation graphique
$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$	On peut rendre $f(x)$ aussi proche que l'on veut de ℓ en choisissant x suffisamment proche de x_0 avec $x > x_0$.	

Limites à gauche et à droite : exemple

Reconsidérons la fonction de Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$



Nous avons vu que la limite de $H(x)$ lorsque x tend vers 0 n'existe pas. En revanche, puisque $H(x) = 0$ si $x < 0$, on a $\lim_{x \to x_0^-} H(x) = 0$. De même, $\lim_{x \to x_0^+} H(x) = 1$.

Limites à gauche et à droite : théorème

Théorème

Soient $a < x_0 < b$ *des réels et soit* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$. *Alors*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \text{ existe } \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) \text{ existent}$$

.

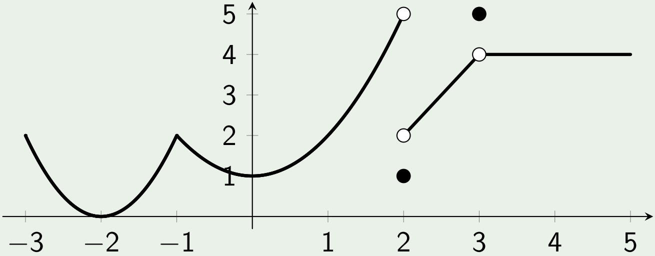
Exemple

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ x & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$. *On a*
$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = 1$. *Donc* $\lim_{x \to 1} f(x) = 1$.

Approche graphique des limites à gauche et à droite

Exercice

Soit $f : [-3, 5] \to \mathbb{R}$ *une fonction dont le graphe est représenté ci-dessous :*



À la lecture du graphique, déterminer (1) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, *(2)* $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, *(3)* $\lim_{x\to 3^-} f(x)$, *(4)* $\lim_{x\to 3^+} f(x)$.

Sommaire

Définition de limite infinie

Définitions

Considérons une fonction f définie au voisinage d'un point a.

1. La **limite de** $f(x)$ **en** a **est égale à** $+\infty$ si $f(x)$ prend des valeurs infiniment grandes, lorsque x s'approche suffisamment de a, sans toutefois être égal à a, noté $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Définition de limite infinie

Définitions

Considérons une fonction f définie au voisinage d'un point a.

1. La **limite de** $f(x)$ **en** a **est égale à** $+\infty$ si $f(x)$ prend des valeurs infiniment grandes, lorsque x s'approche suffisamment de a, sans toutefois être égal à a, noté $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
2. La **limite de** $f(x)$ **en** a **est égale à** $-\infty$ si $f(x)$ prend des valeurs infiniment petites et négatives, lorsque x s'approche suffisamment de a, sans toutefois être égal à a, noté $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Limites à droite et à gauche

Remarque

Comme nous l'avons précédemment vu, nous pouvons considérer la limite de $f(x)$ à droite et à gauche de a. Ceci est également valable dans le contexte des limites infinies, nous pouvons écrire :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = -\infty$$

Exemple 1

Exemple

Considérons la fonctions $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
La fonction f *n'étant pas définie en* $x = 0$, *étudier la limite* $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ *revient à étudier les deux limites à droite et à gauche.*
Pour ce faire, nous nous aiderons de la courbe représentative de la fonction f.

Exemple 1

Exemple

Considérons la fonctions $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
La fonction f *n'étant pas définie en* $x = 0$, *étudier la limite* $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ *revient à étudier les deux limites à droite et à gauche.*
Pour ce faire, nous nous aiderons de la courbe représentative de la fonction f. *Ainsi :*

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

Exemple 1

Exemple

Considérons la fonctions $f(x) = \dfrac{1}{x}$.
La fonction f *n'étant pas définie en* $x = 0$, *étudier la limite* $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ *revient à étudier les deux limites à droite et à gauche.*
Pour ce faire, nous nous aiderons de la courbe représentative de la fonction f. *Ainsi :*

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$$

Il en découle que $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ *n'existe pas.*

Exemple 2

Exemple

Considérons la fonctions $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
La fonction g *n'étant pas définie en* $x = 0$, *étudier la limite* $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ *revient, comme avant, à étudier les deux limites à droite et à gauche. Pour ce faire, nous exploiterons la courbe représentative de la fonction* g.

Exemple 2

Exemple

Considérons la fonctions $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
La fonction g *n'étant pas définie en* $x = 0$, *étudier la limite* $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ *revient, comme avant, à étudier les deux limites à droite et à gauche. Pour ce faire, nous exploiterons la courbe représentative de la fonction* g. *Ainsi :*

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = +\infty$$

Exemple 2

Exemple

Considérons la fonctions $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.
La fonction g *n'étant pas définie en* $x = 0$*, étudier la limite* $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ *revient, comme avant, à étudier les deux limites à droite et à gauche. Pour ce faire, nous exploiterons la courbe représentative de la fonction* g*. Ainsi :*

$$\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$$
$$\lim_{x \to 0^-} g(x) = +\infty$$

Par conséquent, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = +\infty$.

Limite du type $\dfrac{1}{0}$

Remarque

Dans les deux exemples précédents, nos limites avaient la forme $\dfrac{1}{0^+}$ *ou* $\dfrac{1}{0^-}$.

Limite du type $\dfrac{1}{0}$

Remarque

Dans les deux exemples précédents, nos limites avaient la forme $\dfrac{1}{0^+}$ *ou* $\dfrac{1}{0^-}$.

Plus généralement :

Terminologie

*Une limite est **de type*** $\dfrac{1}{0}$, *lorsqu'il s'agit d'une limite de la forme* $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, *en ayant* $\displaystyle\lim_{x\to a} g(x)=0$ *et* $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)\neq 0$

Calculer une limite du type $\dfrac{1}{0}$

Remarque

Afin de calculer une limite de ce type, il est nécessaire de calculer séparément les limites à droite et à gauche. Si celles-ci coïncident, alors la limite existe et vaut cette valeur. Le cas contraire, la limité n'existe pas.

Remarque

La factorisation peut aider dans le calcul de limites, soit pour effectuer des simplifications, soit pour déterminer le signe du résultat, comme illustré ci-dessous.

Exemple

Pour calculer $\lim_{x \to -2} \dfrac{-2}{2x+4}$*, nous commencer par remarquer qu'il s'agit d'une limite de type* $\dfrac{1}{0}$*, comme* $\lim_{x \to -2} 2x + 4 = 0$ *et* $\lim_{x \to -2} -2 = -2 \neq 0$.

Exemple

Pour calculer $\lim\limits_{x \to -2} \frac{-2}{2x+4}$*, nous commencer par remarquer qu'il s'agit d'une limite de type* $\frac{1}{0}$*, comme* $\lim\limits_{x \to -2} 2x + 4 = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to -2} -2 = -2 \neq 0$*. Calculons donc les limites à droite et à gauche :*

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{-2}{2x+4}$$

Exemple

Pour calculer $\lim_{x \to -2} \dfrac{-2}{2x+4}$*, nous commencer par remarquer qu'il s'agit d'une limite de type* $\dfrac{1}{0}$*, comme* $\lim_{x \to -2} 2x+4 = 0$ *et* $\lim_{x \to -2} -2 = -2 \neq 0$*. Calculons donc les limites à droite et à gauche :*

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{-2}{2x+4} = \lim_{x \to -2^+} \frac{-2}{2(x+2)}$$

Exemple

Pour calculer $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{-2}{2x+4}$, *nous commencer par remarquer qu'il s'agit d'une limite de type* $\dfrac{1}{0}$, *comme* $\lim\limits_{x \to -2} 2x+4 = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to -2} -2 = -2 \neq 0$. *Calculons donc les limites à droite et à gauche :*

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{-2}{2x+4} = \lim_{x \to -2^+} \frac{-2}{2(x+2)} = \lim_{x \to -2^+} \frac{-1}{x+2}$$

Exemple

Pour calculer $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-2}{2x+4}$*, nous commencer par remarquer qu'il s'agit d'une limite de type* $\dfrac{1}{0}$*, comme* $\lim\limits_{x\to -2} 2x+4 = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to -2} -2 = -2 \neq 0$*. Calculons donc les limites à droite et à gauche :*

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{-2}{2x+4} = \lim_{x\to -2^+} \frac{-2}{2(x+2)} = \lim_{x\to -2^+} \frac{-1}{x+2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Exemple

Pour calculer $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{-2}{2x+4}$, *nous commencer par remarquer qu'il s'agit d'une limite de type* $\dfrac{1}{0}$, *comme* $\lim\limits_{x \to -2} 2x + 4 = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to -2} -2 = -2 \neq 0$. *Calculons donc les limites à droite et à gauche :*

$$\lim_{x \to -2^+} \frac{-2}{2x+4} = \lim_{x \to -2^+} \frac{-2}{2(x+2)} = \lim_{x \to -2^+} \frac{-1}{x+2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{-2}{2x+4}$$

Exemple

Pour calculer $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-2}{2x+4}$*, nous commencer par remarquer qu'il s'agit d'une limite de type* $\dfrac{1}{0}$*, comme* $\lim\limits_{x\to -2} 2x+4 = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to -2} -2 = -2 \neq 0$*. Calculons donc les limites à droite et à gauche :*

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{-2}{2x+4} = \lim_{x\to -2^+} \frac{-2}{2(x+2)} = \lim_{x\to -2^+} \frac{-1}{x+2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{-2}{2x+4} = \lim_{x\to -2^-} \frac{-2}{2(x+2)}$$

Exemple

Pour calculer $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-2}{2x+4}$, *nous commencer par remarquer qu'il s'agit d'une limite de type* $\dfrac{1}{0}$, *comme* $\lim\limits_{x\to -2} 2x+4 = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to -2} -2 = -2 \neq 0$. *Calculons donc les limites à droite et à gauche :*

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{-2}{2x+4} = \lim_{x\to -2^+} \frac{-2}{2(x+2)} = \lim_{x\to -2^+} \frac{-1}{x+2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{-2}{2x+4} = \lim_{x\to -2^-} \frac{-2}{2(x+2)} = \lim_{x\to -2^-} \frac{-1}{x+2}$$

Exemple

Pour calculer $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-2}{2x+4}$, *nous commencer par remarquer qu'il s'agit d'une limite de type* $\dfrac{1}{0}$, *comme* $\lim\limits_{x\to -2} 2x+4 = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to -2} -2 = -2 \neq 0$. *Calculons donc les limites à droite et à gauche :*

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{-2}{2x+4} = \lim_{x\to -2^+} \frac{-2}{2(x+2)} = \lim_{x\to -2^+} \frac{-1}{x+2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$
$$\lim_{x\to -2^-} \frac{-2}{2x+4} = \lim_{x\to -2^-} \frac{-2}{2(x+2)} = \lim_{x\to -2^-} \frac{-1}{x+2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

Exemple

Pour calculer $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-2}{2x+4}$*, nous commencer par remarquer qu'il s'agit d'une limite de type* $\dfrac{1}{0}$*, comme* $\lim\limits_{x\to -2} 2x+4 = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to -2} -2 = -2 \neq 0$. *Calculons donc les limites à droite et à gauche :*

$$\lim_{x\to -2^+} \frac{-2}{2x+4} = \lim_{x\to -2^+} \frac{-2}{2(x+2)} = \lim_{x\to -2^+} \frac{-1}{x+2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$
$$\lim_{x\to -2^-} \frac{-2}{2x+4} = \lim_{x\to -2^-} \frac{-2}{2(x+2)} = \lim_{x\to -2^-} \frac{-1}{x+2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

Ainsi, $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{-2}{2x+4}$ *n'existe pas.*

Exemple

Calculons $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-2}{x^2+3x-4}$ *:*

Premièrement, nous remarquons qu'il s'agit d'une limite de type $\dfrac{1}{0}$*, comme* $\lim\limits_{x \to 1} x^2+3x-4 = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to 1} x-2 = -1 \neq 0$*.*

Exemple

Calculons $\lim_{x \to 1} \dfrac{x-2}{x^2+3x-4}$ *:*

Premièrement, nous remarquons qu'il s'agit d'une limite de type $\dfrac{1}{0}$*, comme* $\lim_{x \to 1} x^2+3x-4=0$ *et* $\lim_{x \to 1} x-2=-1 \neq 0$*. Calculons donc les limites à droite et à gauche :*

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x-2}{x^2+3x-4} =$$

Exemple

Calculons $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-2}{x^2+3x-4}$ *:*

Premièrement, nous remarquons qu'il s'agit d'une limite de type $\dfrac{1}{0}$*, comme* $\lim\limits_{x \to 1} x^2+3x-4 = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to 1} x-2 = -1 \neq 0$*. Calculons donc les limites à droite et à gauche :*

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x-2}{x^2+3x-4} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-2}{(x-1)(x+4)}$$

Exemple

Calculons $\lim_{x \to 1} \frac{x-2}{x^2+3x-4}$ *:*

Premièrement, nous remarquons qu'il s'agit d'une limite de type $\frac{1}{0}$*, comme* $\lim_{x \to 1} x^2+3x-4 = 0$ *et* $\lim_{x \to 1} x-2 = -1 \neq 0$*. Calculons donc les limites à droite et à gauche :*

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x-2}{x^2+3x-4} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-2}{(x-1)(x+4)} = \frac{-1}{0^+ \cdot 5} = -\infty$$

Exemple

Calculons $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-2}{x^2+3x-4}$ *:*

Premièrement, nous remarquons qu'il s'agit d'une limite de type $\dfrac{1}{0}$*, comme* $\lim\limits_{x\to 1} x^2+3x-4=0$ *et* $\lim\limits_{x\to 1} x-2=-1\neq 0$*. Calculons donc les limites à droite et à gauche :*

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x-2}{x^2+3x-4} = \lim_{x\to 1^+} \frac{x-2}{(x-1)(x+4)} = \frac{-1}{0^+\cdot 5} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x-2}{x^2+3x-4}$$

Exemple

Calculons $\lim_{x \to 1} \dfrac{x-2}{x^2+3x-4}$ *:*

Premièrement, nous remarquons qu'il s'agit d'une limite de type $\dfrac{1}{0}$*, comme* $\lim_{x \to 1} x^2+3x-4 = 0$ *et* $\lim_{x \to 1} x-2 = -1 \neq 0$*. Calculons donc les limites à droite et à gauche :*

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x-2}{x^2+3x-4} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-2}{(x-1)(x+4)} = \frac{-1}{0^+ \cdot 5} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x-2}{x^2+3x-4} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-2}{(x-1)(x+4)}$$

Exemple

Calculons $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-2}{x^2+3x-4}$ *:*

Premièrement, nous remarquons qu'il s'agit d'une limite de type $\dfrac{1}{0}$*, comme* $\lim\limits_{x \to 1} x^2+3x-4 = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to 1} x-2 = -1 \neq 0$*. Calculons donc les limites à droite et à gauche :*

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x-2}{x^2+3x-4} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-2}{(x-1)(x+4)} = \frac{-1}{0^+ \cdot 5} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x-2}{x^2+3x-4} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-2}{(x-1)(x+4)} = \frac{-1}{0^- \cdot 5} = +\infty$$

Exemple

Calculons $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-2}{x^2+3x-4}$ *:*

Premièrement, nous remarquons qu'il s'agit d'une limite de type $\dfrac{1}{0}$*, comme* $\lim\limits_{x \to 1} x^2+3x-4 = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to 1} x-2 = -1 \neq 0$*. Calculons donc les limites à droite et à gauche :*

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x-2}{x^2+3x-4} = \lim_{x \to 1^+} \frac{x-2}{(x-1)(x+4)} = \frac{-1}{0^+ \cdot 5} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x-2}{x^2+3x-4} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x-2}{(x-1)(x+4)} = \frac{-1}{0^- \cdot 5} = +\infty$$

En conclusion, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-2}{x^2+3x-4}$ *n'existe pas.*

Définition de limite en l'infini

Définitions

Considérons une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1. La **limite de** $f(x)$ **quand** x **tend vers** $+\infty$ **est égale à** L si, et seulement si, $f(x)$ s'approche suffisamment de L, lorsque x devient infiniment grand, noté $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Définition de limite en l'infini

Définitions

Considérons une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1. La **limite de** $f(x)$ **quand** x **tend vers** $+\infty$ **est égale à** L si, et seulement si, $f(x)$ s'approche suffisamment de L, lorsque x devient infiniment grand, noté $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.
2. La **limite de** $f(x)$ **quand** x **tend vers** $-\infty$ **est égale à** L si, et seulement si, $f(x)$ s'approche suffisamment de L, lorsque x devient infiniment petit dans les négatifs, noté $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.

Remarques sur la notation

Remarques

1. *Des fois, nous écrivons* $\lim_{x \to \infty} f(x)$*, au lieu de* $\lim_{x \to +\infty} f(x)$*.*
2. $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$ *est une écriture "abrégée" signifiant que nous considérons simultanément* $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ *et* $\lim_{x \to -\infty} f(x)$*.*

Opérations sur les limites

Considérons deux fonctions f et g et $a \in \mathbb{R}$ ou $a \in \{\pm\infty\}$.
Nous allons regrouper, dans un tableau, toutes les opérations sur les limites $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, en ajoutant les cas où la limite est infinie.

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$	$\lim\limits_{x\to a}(f-g)(x)$
L_1	L_2	L_1+L_2	L_1-L_2
L_1	0	L_1	L_1
L_1	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
0	L_2	L_2	L_2
0	0	0	0
0	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
$+\infty$	$-\infty$		$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$		$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a} (fg)(x)$	$\lim\limits_{x\to a} (f/g)(x)$
L_1	L_2	$L_1 L_2$	L_1/L_2
L_1	0	0	$\pm\infty$
L_1	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
0	L_2	0	$\pm\infty$
0	0	0	
0	$\pm\infty$		$\pm\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	

Formes indéterminées

Les cases laissées vides, dans les deux tableaux précédents, sont pour les opérations non-définies, c'est-à-dire dont on ne peut pas prévoir le comportement.

Formes indéterminées

Les cases laissées vides, dans les deux tableaux précédents, sont pour les opérations non-définies, c'est-à-dire dont on ne peut pas prévoir le comportement.
Par exemple :

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$

Formes indéterminées

Les cases laissées vides, dans les deux tableaux précédents, sont pour les opérations non-définies, c'est-à-dire dont on ne peut pas prévoir le comportement.
Par exemple :

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$

Formes indéterminées

Les cases laissées vides, dans les deux tableaux précédents, sont pour les opérations non-définies, c'est-à-dire dont on ne peut pas prévoir le comportement.
Par exemple :

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ax}{x} = \lim\limits_{x \to 0} a = a$

Formes indéterminées

Les cases laissées vides, dans les deux tableaux précédents, sont pour les opérations non-définies, c'est-à-dire dont on ne peut pas prévoir le comportement.

Par exemple :

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^2} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ax}{x} = \lim\limits_{x \to 0} a = a$

En procédant de manière analogue, nous pouvons comprendre en quoi $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ sont des opérations non-définies ; ce sera un exercice !

Formes indéterminées

Définition

Une **forme indéterminée** est une limite de la forme $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$.

Formes indéterminées

Définition

Une **forme indéterminée** est une limite de la forme $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$.

Les formes indéterminées sont quand même assez embêtantes. Heureusement, il existe des méthodes permettant de **lever les indéterminations**, que nous allons explorer sur-le-champ.

Méthode : type $\dfrac{0}{0}$ polynomial

Considérons f et g deux polynômes et $a \in \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$.

Méthode : type $\dfrac{0}{0}$ polynomial

Considérons f et g deux polynômes et $a \in \mathbb{R}$ tels que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{0}{0}$.

Remarque

Étant donné que $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$ *et que* f *et* g *sont des polynômes, donc définis sur* $\mathbb{R}$*, nous pouvons nous attendre à ce que* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a) = 0$.
Il en suit que a *est une racine de* f *et de* g*, ce qui implique que nous pouvons écrire* $f(x) = (x - a)p(x)$ *et* $g(x) = (x - a)q(x)$.

Méthode : type $\dfrac{0}{0}$ polynomial

Nous aboutissons à la méthodologie suivante :

Méthode

1. *Factoriser* f *et* g

Méthode : type $\dfrac{0}{0}$ polynomial

Nous aboutissons à la méthodologie suivante :

Méthode

1. *Factoriser* f *et* g
2. *Simplifier entre numérateur et dénominateur*

Méthode : type $\dfrac{0}{0}$ polynomial

Nous aboutissons à la méthodologie suivante :

Méthode

1. *Factoriser* f *et* g
2. *Simplifier entre numérateur et dénominateur*
3. *Si la limite de la fraction simplifiée n'est plus du type* $\dfrac{0}{0}$*, nous pouvons la déterminer avec des outils connus.*

Méthode : type $\dfrac{0}{0}$ polynomial

Exemple

Trouvons $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ *:*

Méthode : type $\dfrac{0}{0}$ polynomial

Exemple

Trouvons $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ *:*

Par un calcul direct, nous déduisons qu'il s'agit d'une limite de type $\dfrac{0}{0}$ *polynomial. En conséquence :*

Méthode : type $\dfrac{0}{0}$ polynomial

Exemple

Trouvons $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ *:*

Par un calcul direct, nous déduisons qu'il s'agit d'une limite de type $\dfrac{0}{0}$ *polynomial. En conséquence :*

1. $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}$

Méthode : type $\dfrac{0}{0}$ polynomial

Exemple

Trouvons $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$ *:*
Par un calcul direct, nous déduisons qu'il s'agit d'une limite de type $\dfrac{0}{0}$ *polynomial. En conséquence :*

1. $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4} = \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}$
2. $\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{(x-1)}{(x+2)}$

Méthode : type $\dfrac{0}{0}$ polynomial

Exemple

Trouvons $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$ *:*

Par un calcul direct, nous déduisons qu'il s'agit d'une limite de type $\dfrac{0}{0}$ *polynomial. En conséquence :*

1. $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)}$
2. $\dfrac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{(x-1)}{(x+2)}$
3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-1)}{(x+2)} = \dfrac{1}{4}.$

Méthode : type $\dfrac{0}{0}$ racine carrée

Considérons f et g contenant l'un et/ou l'autre une racine carrée et $a \in \mathbb{R}$ tels que $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$.

Méthode : type $\dfrac{0}{0}$ racine carrée

Nous aboutissons à la méthodologie suivante :

Méthode

1. *Multiplier par le conjugué de l'expression contenant la racine carrée, et développer* $(a-b)(a+b)$ *à l'aide de la troisième identité remarquable :* a^2-b^2

Méthode : type $\dfrac{0}{0}$ racine carrée

Nous aboutissons à la méthodologie suivante :

Méthode

1. *Multiplier par le conjugué de l'expression contenant la racine carrée, et développer* $(a-b)(a+b)$ *à l'aide de la troisième identité remarquable :* $a^2 - b^2$
2. *Simplifier entre numérateur et dénominateur*

Méthode : type $\dfrac{0}{0}$ racine carrée

Nous aboutissons à la méthodologie suivante :

Méthode

1. *Multiplier par le conjugué de l'expression contenant la racine carrée, et développer $(a-b)(a+b)$ à l'aide de la troisième identité remarquable : $a^2 - b^2$*
2. *Simplifier entre numérateur et dénominateur*
3. *Si la limite de la fraction simplifiée n'est plus du type $\dfrac{0}{0}$, nous pouvons la déterminer avec des outils connus.*

Méthode : type $\dfrac{0}{0}$ racine carrée

Exemple

Trouvons $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x} - 2}{(x-4)(x^2-5)}$ *:*

Méthode : type $\dfrac{0}{0}$ racine carrée

Exemple

Trouvons $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{(x-4)(x^2-5)}$ *:*

Par un calcul direct, nous déduisons qu'il s'agit d'une limite de type $\dfrac{0}{0}$ *racine carrée. D'où :*

Méthode : type $\dfrac{0}{0}$ racine carrée

Exemple

Trouvons $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{(x-4)(x^2-5)}$ *:*

Par un calcul direct, nous déduisons qu'il s'agit d'une limite de type $\dfrac{0}{0}$ *racine carrée. D'où :*

1. $\dfrac{\sqrt{x}-2}{(x-4)(x^2-5)} = \dfrac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)(x^2-5)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \dfrac{x-4}{(x-4)(x^2-5)\left(\sqrt{x}+2\right)}$

Méthode : type $\dfrac{0}{0}$ racine carrée

Exemple

Trouvons $\displaystyle\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{(x-4)(x^2-5)}$ *:*

Par un calcul direct, nous déduisons qu'il s'agit d'une limite de type $\dfrac{0}{0}$ *racine carrée. D'où :*

1. $$\frac{\sqrt{x}-2}{(x-4)(x^2-5)} = \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)(x^2-5)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \frac{x-4}{(x-4)(x^2-5)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$
2. $$\frac{x-4}{(x-4)(x^2-5)} = \frac{1}{(x^2-5)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

Méthode : type $\dfrac{0}{0}$ racine carrée

Exemple

3. $\displaystyle \lim_{x \to 4} \frac{1}{\left(x^2 - 5\right)\left(\sqrt{x} + 2\right)} = \frac{1}{11 \cdot 4} = \frac{1}{44}.$

Méthode : types $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$

Considérons f et g deux polynômes tels que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, ou $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ sont de type $\dfrac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$.

Méthode : types $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$

Considérons f et g deux polynômes tels que $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, ou $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$ sont de type $\frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty$.
Étant donné que f et g sont deux polynômes, nous pouvons toujours factoriser par le terme de plus haut degré, c'est ce que nous appellerons **mise en évidence forcée**.

Méthode : types $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$

Nous débouchons sur la méthodologie suivante :

Méthode

1. *Effectuer une ou plusieurs mise en évidence forcées*

Méthode : types $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$

Nous débouchons sur la méthodologie suivante :

Méthode

1. *Effectuer une ou plusieurs mise en évidence forcées*
2. Dans le cas des fractions : *simplifier entre numérateur et dénominateur*

Méthode : types $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$

Nous débouchons sur la méthodologie suivante :

Méthode

1. *Effectuer une ou plusieurs mise en évidence forcées*
2. Dans le cas des fractions : *simplifier entre numérateur et dénominateur*
3. *Si la nouvelle limite n'est plus indéterminée, nous pouvons la déterminer avec des outils connus.*

Méthode : types $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$

Exemple

Déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} 4x^3 - 2x + 1$ *:*

Méthode : types $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$

Exemple

Déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} 4x^3 - 2x + 1$ *:*

Par un calcul direct, nous déduisons qu'il s'agit d'une limite de type $\infty - \infty$*. Par conséquent :*

Méthode : types $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$

Exemple

Déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} 4x^3 - 2x + 1$ *:*

Par un calcul direct, nous déduisons qu'il s'agit d'une limite de type $\infty - \infty$*. Par conséquent :*

1. $4x^3 - 2x + 1 = x^3 \left(4 - \dfrac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$

Méthode : types $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$

Exemple

Déterminons $\lim\limits_{x \to +\infty} 4x^3 - 2x + 1$ *:*

Par un calcul direct, nous déduisons qu'il s'agit d'une limite de type $\infty - \infty$*. Par conséquent :*

1. $4x^3 - 2x + 1 = x^3 \left(4 - \dfrac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 \left(4 - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}\right) = +\infty \cdot (4 - 0 + 0) = +\infty.$

Méthode : types $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$

Exemple

Déterminons $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2 - 3x + 9}{7x^2 + 2x - 8}$ *:*

Méthode : types $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$

Exemple

Déterminons $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2 - 3x + 9}{7x^2 + 2x - 8}$ *:*

Par un calcul direct, nous déduisons qu'il s'agit d'une limite de type $\dfrac{\infty}{\infty}$*. Ainsi :*

Méthode : types $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$

Exemple

Déterminons $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{5x^2 - 3x + 9}{7x^2 + 2x - 8}$ *:*

Par un calcul direct, nous déduisons qu'il s'agit d'une limite de type $\dfrac{\infty}{\infty}$*. Ainsi :*

1. $$\frac{5x^2 - 3x + 9}{7x^2 + 2x - 8} = \frac{x^2\left(5 - \dfrac{3}{x} + \dfrac{9}{x^2}\right)}{x^2\left(7 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{8}{x^2}\right)}$$

Méthode : types $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$

Exemple (suite)

2. $$\frac{x^2\left(5-\dfrac{3}{x}+\dfrac{9}{x^2}\right)}{x^2\left(7+\dfrac{2}{x}-\dfrac{8}{x^2}\right)} = \frac{5-\dfrac{3}{x}+\dfrac{9}{x^2}}{7+\dfrac{2}{x}-\dfrac{8}{x^2}}$$

Méthode : types $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$

Exemple (suite)

2. $$\frac{x^2\left(5 - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2}\right)}{x^2\left(7 + \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2}\right)} = \frac{5 - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2}}{7 + \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2}}$$

3. $$\lim_{x\to+\infty} \frac{5 - \frac{3}{x} + \frac{9}{x^2}}{7 + \frac{2}{x} - \frac{8}{x^2}} = \frac{5-0+0}{7+0-0} = \frac{5}{7}.$$

Exercice

1. *Comme nous l'avons fait pour* $\frac{0}{0}$, *expliquer en quoi* $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$ *sont des opérations non-définies.*
2. *Calculer les limites suivantes :*

   i. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x+3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{3}}$
   ii. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-2}{x^3 - 8}$
   iii. $\lim\limits_{x \to 16} \dfrac{x-16}{\sqrt{x} - 4}$
   iv. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{4 - \sqrt{16+h}}{h}$
   v. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5x^4 - 9x + 1}{3x^3 - 5x^2 + 8}$
   vi. $\lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{1}{h}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+h}} - 1\right)$
   vii. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - \pi x + 6}{3x^2 - \ln(e)x^2 + 1}$
   viii. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 - 9}{(x-3)(x+3)(x+7)}$
   ix. $\lim\limits_{x \to -\infty} 4x^3 + 5x^{10} - 3$
   x. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

Correction

Sommaire

Intuition

Dans l'usage courant, on dit que le **temps** est continu, car il se déroule de manière **ininterrompue**. Un jour donné, le temps ne passe pas de 13h à 13h01, ce qui laisserait un **trou** d'une minute.

Intuition

Dans l'usage courant, on dit que le **temps** est continu, car il se déroule de manière **ininterrompue**. Un jour donné, le temps ne passe pas de 13h à 13h01, ce qui laisserait un **trou** d'une minute.

Si un objet posé sur une armoire de 2 mètres de haut tombe, l'objet passe par toutes les "altitudes" entre 2 et 0 mètres avant de toucher le sol.

Intuition

Dans l'usage courant, on dit que le **temps** est continu, car il se déroule de manière **ininterrompue**. Un jour donné, le temps ne passe pas de 13h à 13h01, ce qui laisserait un **trou** d'une minute.

Si un objet posé sur une armoire de 2 mètres de haut tombe, l'objet passe par toutes les "altitudes" entre 2 et 0 mètres avant de toucher le sol.

En mathématiques, nous utilisons l'expression **"fonction continue"** dans un sens similaire. Intuitivement, nous considérons une fonction continue comme une fonction dont le graphe ne présente pas de ruptures, de trous ou d'asymptotes verticales.

Exemple introductif

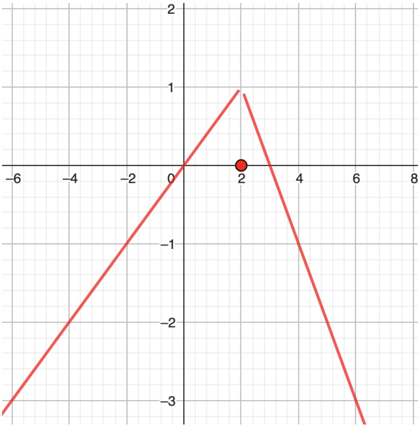
Exercice

Déterminer si la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & \text{si } x < 2, \\ 0 & \text{si } x = 2, \\ -x+3 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

est continue en $a = 2$?

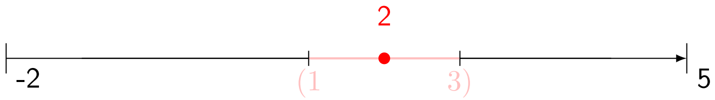
Graphe de f



Définition de la continuité

Définition

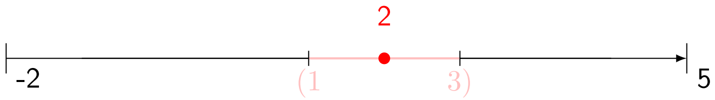
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, où $I \subseteq \mathbb{R}$, et $a \in I$. Un ***voisinage de*** *a est un intervalle ouvert J tel que $a \in J$.*



Définition de la continuité

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, où $I \subseteq \mathbb{R}$, et $a \in I$. Un ***voisinage de*** *a est un intervalle ouvert J tel que $a \in J$.*



Remarque

La notion de voisinage permet d'être certain que si on considère une fonction f dans un voisinage J d'un nombre a, on peut alors toujours considérer des limites quand x tend vers a, depuis la gauche et la droite

Intuition

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, où $I \subseteq \mathbb{R}$, et $a \in I$.

*f **est continue en** $a \iff$ il existe un voisinage de a tel que « une représentation graphique de f dans ce voisinage peut être dessinée sans lever le crayon ».*

*Si f n'est pas continue en a, on dit que f **est discontinue en** a*

Intuition

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction réelle, où* $I \subseteq \mathbb{R}$, *et* $a \in I$.

f ***est continue en*** $a \iff$ *il existe un voisinage de* a *tel que « une représentation graphique de* f *dans ce voisinage peut être dessinée sans lever le crayon ».*

Si f *n'est pas continue en* a, *on dit que* f ***est discontinue en*** a

Définition

f ***est continue sur*** $I \iff f$ *est continue en tout point de* I

Un peu de rigueur mathématique ...

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, où $I \subseteq \mathbb{R}$, et $a \in I$.

$$f \quad \textbf{\textit{est continue en}} \quad a \iff \begin{cases} 1) & \lim_{x \to a} f(x) \text{ existe dans } \mathbb{R} \\ 2) & f(a) \text{ existe dans } \mathbb{R} \\ 3) & \lim_{x \to a} f(x) = f(a) \end{cases}$$

Si on veut être plus concis, on écrira plus simplement :

f ***est continue en*** $a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

Un peu de rigueur mathématique ...

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle, où $I \subseteq \mathbb{R}$, et $a \in I$.

$$f \quad \textbf{\textit{est continue en}} \quad a \iff \begin{cases} 1) & \lim\limits_{x \to a} f(x) \textit{ existe dans } \mathbb{R} \\ 2) & f(a) \textit{ existe dans } \mathbb{R} \\ 3) & \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a) \end{cases}$$

Si on veut être plus concis, on écrira plus simplement :

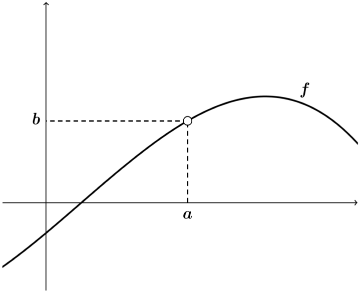
$$f \quad \textbf{\textit{est continue en}} \quad a \iff \lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Remarque

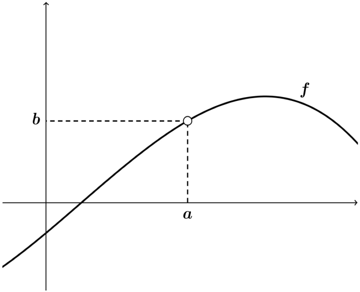
Quand on préfère travailler avec la variable x, on écrit :

$$f \textit{ est continue en } x \iff \lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$$

Exemple 1

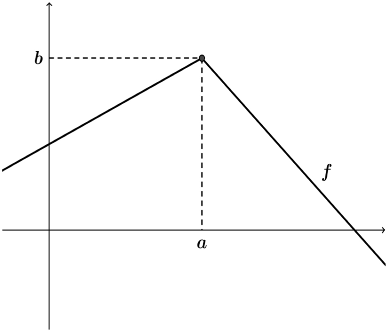


Exemple 1

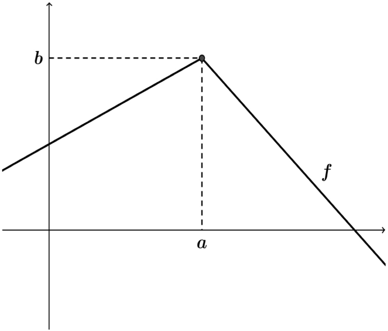


f n'est pas continue en a, car $f(a)$ n'existe pas.

Exemple 2

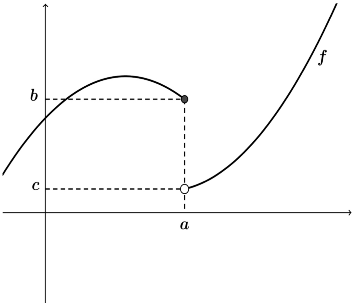


Exemple 2

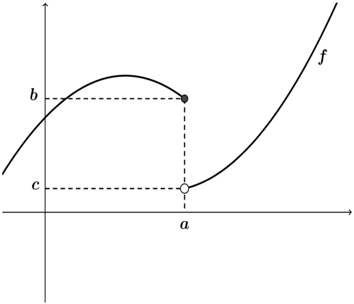


f est continue en a, car $\lim_{x \to a} f(x) = f(a) = b$

Exemple 3

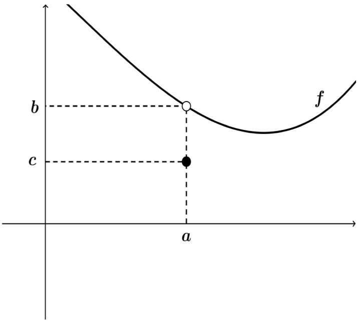


Exemple 3

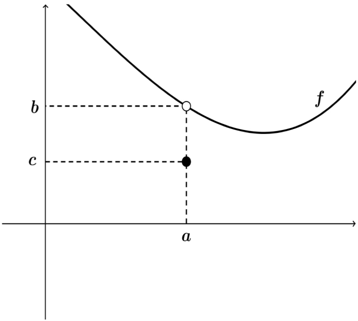


f n'est pas continue en a, car $\lim_{x \to a} f(x)$ n'existe pas.

Exemple 4

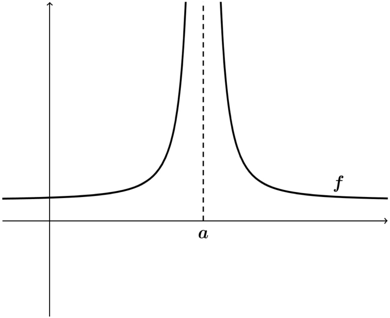


Exemple 4

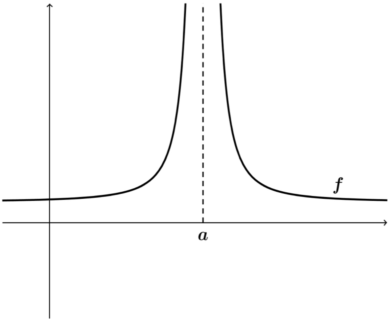


f n'est pas continue en a,
car $\lim_{x \to a} f(x) = b \neq f(a) = c$ n'existe pas.

Exemple 5

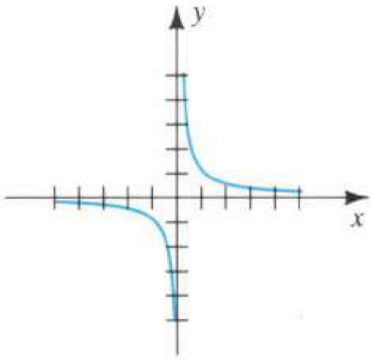


Exemple 5

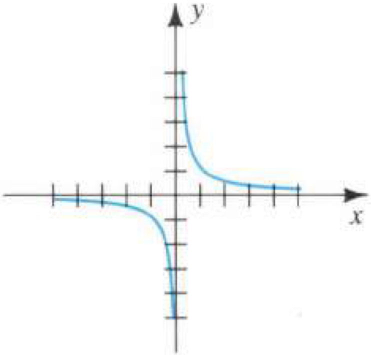


f n'est pas continue en a,
car $f(a)$ n'existe pas.

Exemple 6



Exemple 6

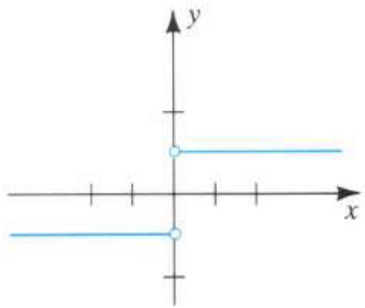


Soit $f(x) := \frac{1}{x}$.

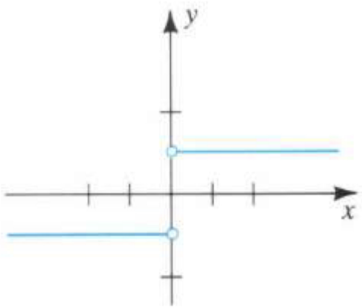
Il y a une discontinuité en $a = 0$, puisque $f(0)$ n'existe pas.

De plus, $\lim_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas non plus.

Exemple 7



Exemple 7



Soit $f(x) := \frac{|x|}{x}$.
Il y a une discontinuité en $a = 0$, puisque $f(0)$ n'est pas défini.
De plus, $\lim_{x \to 0} f(x)$ n'existe pas non plus.

Continuité à gauche et à droite

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle (donc $I \subseteq \mathbb{R}$), et $a \in I$.

f ***est continue à gauche en*** $a \iff \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

Continuité à gauche et à droite

Définition

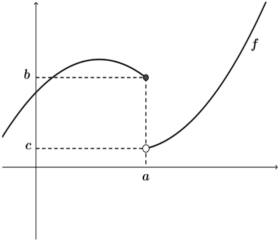
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction réelle (donc $I \subseteq \mathbb{R}$), et $a \in I$.

f ***est continue à gauche en*** $a \iff \lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$

f ***est continue à droite en*** $a \iff \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$

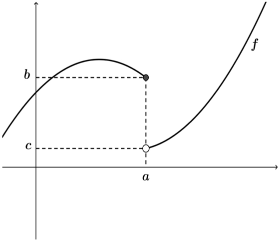
Illustration

Illustration :



Illustration

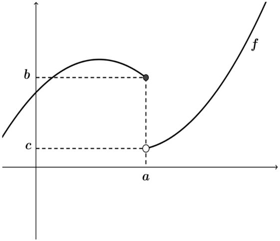
Illustration :



f est continue à gauche en a car $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) = b$

Illustration

Illustration :



f est continue à gauche en a car $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a) = b$

mais n'est pas continue à droite, car $\lim_{x \to a^-} f(x) = c \neq f(a) = b$

Théorème - Fonctions continues

Théorème

- *Les fonctions **constantes** sont continues sur* $\mathbb{R}$

Théorème - Fonctions continues

Théorème

- *Les fonctions **constantes** sont continues sur* $\mathbb{R}$
- *La fonction* f *définie par* $f(x) = x$ *est continue sur* $\mathbb{R}$

Théorème - Fonctions continues

Théorème

- *Les fonctions **constantes** sont continues sur* $\mathbb{R}$
- *La fonction f définie par* $\boldsymbol{f(x) = x}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$
- *Les fonctions **sin** et **cos** sont continues sur* $\mathbb{R}$

Théorème - Fonctions continues

Théorème

- *Les fonctions **constantes** sont continues sur $\mathbb{R}$*
- *La fonction f définie par $f(x) = x$ est continue sur $\mathbb{R}$*
- *Les fonctions **sin** et **cos** sont continues sur $\mathbb{R}$*
- *Les fonctions **racines** n**-ièmes** sont continues sur leur domaine de définition*

Théorème - Fonctions continues

Théorème

- *Les fonctions **constantes** sont continues sur $\mathbb{R}$*
- *La fonction f définie par $\boldsymbol{f(x) = x}$ est continue sur $\mathbb{R}$*
- *Les fonctions **sin** et **cos** sont continues sur $\mathbb{R}$*
- *Les fonctions **racines** n**-ièmes** sont continues sur leur domaine de définition*
- *Les fonctions **exponentielles** et **logarithmes** sont continues sur leur domaine de définition.*

Théorème - Fonctions continues

Théorème

- *Les fonctions* ***constantes*** *sont continues sur* $\mathbb{R}$
- *La fonction* f *définie par* $\boldsymbol{f(x) = x}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$
- *Les fonctions* ***sin*** *et* ***cos*** *sont continues sur* $\mathbb{R}$
- *Les fonctions* ***racines*** n***-ièmes*** *sont continues sur leur domaine de définition*
- *Les fonctions* ***exponentielles*** *et* ***logarithmes*** *sont continues sur leur domaine de définition.*
- *Une fonction* ***polynomiale*** f *est continue* $\forall c \in \mathbb{R}$

Théorème - Fonctions continues

Théorème

- *Les fonctions **constantes** sont continues sur* $\mathbb{R}$
- *La fonction f définie par* $\boldsymbol{f(x) = x}$ *est continue sur* $\mathbb{R}$
- *Les fonctions **sin** et **cos** sont continues sur* $\mathbb{R}$
- *Les fonctions **racines** n**-ièmes** sont continues sur leur domaine de définition*
- *Les fonctions **exponentielles** et **logarithmes** sont continues sur leur domaine de définition.*
- *Une fonction **polynomiale** f est continue* $\forall c \in \mathbb{R}$

Remarque

La démonstration utilise la définition de la continuité et le théorème des limites de fonctions élémentaires.

Théorème - Opérations avec des fonctions continues

Théorème

Si f et g sont deux fonctions continues en a

- *leur **somme** $f + g$ est continue en a.*

Théorème - Opérations avec des fonctions continues

Théorème

Si f et g sont deux fonctions continues en a

- *leur **somme** $f+g$ est continue en a.*
- *leur **différence** $f-g$ est continue en a.*

Théorème - Opérations avec des fonctions continues

Théorème

Si f et g sont deux fonctions continues en a

- *leur **somme** $f + g$ est continue en a.*
- *leur **différence** $f - g$ est continue en a.*
- *leur **produit** $f \cdot g$ est continu en a.*

Théorème - Opérations avec des fonctions continues

Théorème

Si f et g sont deux fonctions continues en a

- *leur **somme** $f+g$ est continue en a.*
- *leur **différence** $f-g$ est continue en a.*
- *leur **produit** $f \cdot g$ est continu en a.*
- *Si de plus $g(a) \neq 0$, alors leur **quotient** $\frac{f}{g}$ est continu en a.*

Théorème - Opérations avec des fonctions continues

Théorème

Si f et g sont deux fonctions continues en a

- *leur **somme** $f + g$ est continue en a.*
- *leur **différence** $f - g$ est continue en a.*
- *leur **produit** $f \cdot g$ est continu en a.*
- *Si de plus $g(a) \neq 0$, alors leur **quotient** $\frac{f}{g}$ est continu en a.*

*Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors leur **composition** $f \circ g$ est continue en a*

Théorème - Opérations avec des fonctions continues

Théorème

Si f et g sont deux fonctions continues en a

- *leur **somme** $f+g$ est continue en a.*
- *leur **différence** $f-g$ est continue en a.*
- *leur **produit** $f \cdot g$ est continu en a.*
- *Si de plus $g(a) \neq 0$, alors leur **quotient** $\frac{f}{g}$ est continu en a.*

*Si f est continue en a et g est continue en $f(a)$, alors leur **composition** $f \circ g$ est continue en a*

Remarque

La démonstration utilise la définition de la continuité et le théorème des propriétés des limites.

Théorème des valeurs intermédiaires

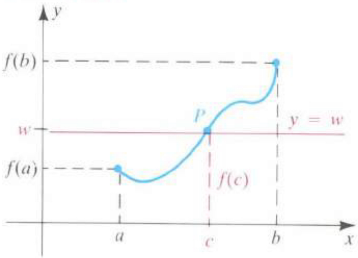
Théorème

Si f est continue sur un intervalle fermé [a,b] et si w est un nombre quelconque entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe au moins un nombre c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = w$.

Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème

Si f est continue sur un intervalle fermé [a,b] et si w est un nombre quelconque entre $f(a)$ et $f(b)$, alors il existe au moins un nombre c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = w$.



Conséquence du TVI

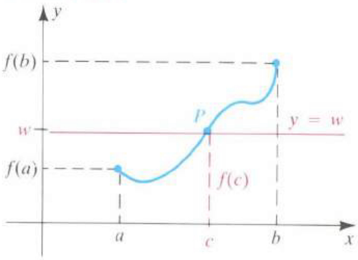
Théorème

Si une fonction f est continue et n'a pas de zéros sur un intervalle, alors $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$ pour chaque x de l'intervalle.

Conséquence du TVI

Théorème

Si une fonction f est continue et n'a pas de zéros sur un intervalle, alors $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$ pour chaque x de l'intervalle.



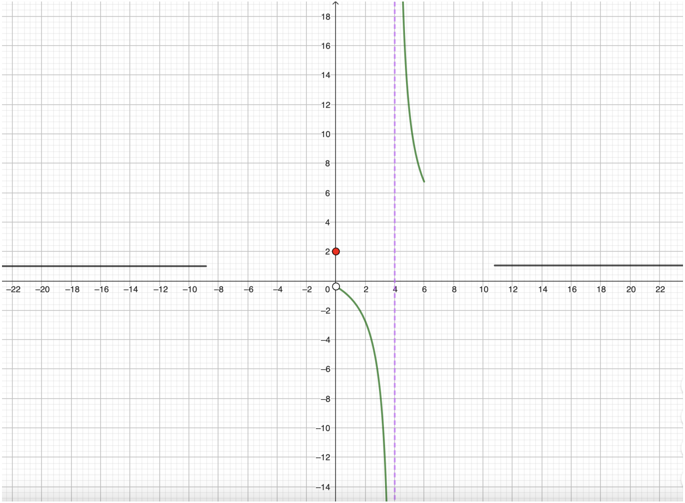
Exercices - Partie 1

Exercice

Esquisser la représentation graphique d'une fonction f qui satisfait simultanément toutes les conditions ci-dessous :

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 1$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$
3. $\lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$
4. $\lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$
5. $f(0) = 2$

Solution


18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10
−12
−14
−22 −20 −18 −16 −14 −12 −10 −8 −6 −4 −2 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22

Exercices - Partie 2

Exercice

1. *Calculer :* $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^2-3x+2}{x^2-4x+4}$
2. *Montrer que* $f(x) = \frac{1}{x}$ *est continue en* $a = 1$ *et qu'elle n'est pas continue en* $a = 0$.
3. *Déterminer si la fonction* f *définie par*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

   est continue en $a = 2$.
4. *Calculer, si elles existent, la limite à gauche et à droite de :* $f(x) := \frac{5x}{(x+3)^3}$, $a = -3$.
   Interpréter graphiquement le résultat au voisinage de $a = -3$.

Solution - Exercice 1

Solution : Pour calculer cette limite, nous pouvons simplifier l'expression en factorisant le numérateur et le dénominateur :

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-2)}$$

On peut simplifier en annulant le facteur commun $(x-2)$ dans le numérateur et le dénominateur :

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-2)} = \lim_{x\to 2^+} \frac{x-1}{x-2}$$

Maintenant, nous pouvons évaluer la limite en remplaçant x par 2 :

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{x-1}{x-2} = \frac{2-1}{2-2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Solution - Exercice 1

Solution : Pour calculer cette limite, nous pouvons simplifier l'expression en factorisant le numérateur et le dénominateur :

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-2)}$$

On peut simplifier en annulant le facteur commun $(x-2)$ dans le numérateur et le dénominateur :

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-2)(x-2)} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x-1}{x-2}$$

Maintenant, nous pouvons évaluer la limite en remplaçant x par 2 :

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x-1}{x-2} = \frac{2-1}{2-2} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

La limite n'est pas définie car le dénominateur devient nul.
Donc, la limite n'existe pas.

Solution - Exercice 1

Remarque

La limite, dans cet exercice, n'existe pas, parce qu'elle est infinie. En effet, dans la définition de limite vue au début, une limite est uniquement un nombre réel.

Solution - Exercice 2

Solution : Pour montrer que $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue en $a = 1$, nous devons vérifier trois conditions :

Solution - Exercice 2

Solution : Pour montrer que $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue en $a = 1$, nous devons vérifier trois conditions :

1. La fonction f est définie en $a = 1$, ce qui est vrai car $f(1) = \frac{1}{1} = 1$.

Solution - Exercice 2

Solution : Pour montrer que $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue en $a = 1$, nous devons vérifier trois conditions :

1. La fonction f est définie en $a = 1$, ce qui est vrai car $f(1) = \frac{1}{1} = 1$.
2. $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe, ce qui est vrai car $\lim_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1}{1} = 1$.

Solution - Exercice 2

Solution : Pour montrer que $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue en $a = 1$, nous devons vérifier trois conditions :

1. La fonction f est définie en $a = 1$, ce qui est vrai car $f(1) = \frac{1}{1} = 1$.
2. $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe, ce qui est vrai car $\lim_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1}{1} = 1$.
3. $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$, ce qui est vrai car $\lim_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1)$

Solution - Exercice 2

Solution : Pour montrer que $f(x) = \frac{1}{x}$ est continue en $a = 1$, nous devons vérifier trois conditions :

1. La fonction f est définie en $a = 1$, ce qui est vrai car $f(1) = \frac{1}{1} = 1$.
2. $\lim_{x \to 1} f(x)$ existe, ce qui est vrai car $\lim_{x \to 1} f(x) = \dfrac{1}{1} = 1$.
3. $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$, ce qui est vrai car $\lim_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1)$

Pour $a = 0$, on remarque que $f(0)$ n'est pas défini car on ne peut pas diviser par zéro.
Par conséquent, la première condition n'est pas satisfaite, ce qui signifie que $f(x)$ n'est pas continue en $a = 0$.

Solution - Exercice 3

3. Déterminer si la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

est continue en $a = 2$.

Solution : La fonction $f(x)$ est définie différemment pour $x \neq 2$ et $x = 2$. Vérifions les 3 conditions de la continuité :

Solution - Exercice 3

3. Déterminer si la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

est continue en $a = 2$.

Solution : La fonction $f(x)$ est définie différemment pour $x \neq 2$ et $x = 2$. Vérifions les 3 conditions de la continuité :

1. f est définie en $a = 2$, ce qui est vrai car $f(2) = 4$.

Solution - Exercice 3

3. Déterminer si la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

est continue en $a = 2$.

Solution : La fonction $f(x)$ est définie différemment pour $x \neq 2$ et $x = 2$. Vérifions les 3 conditions de la continuité :

1. f est définie en $a = 2$, ce qui est vrai car $f(2) = 4$.
2. $\lim_{x \to 2} f(x)$ existe, ce qui est vrai car $\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x \to 2}(x+2) = 4.$

Solution - Exercice 3

3. Déterminer si la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

est continue en $a = 2$.

Solution : La fonction $f(x)$ est définie différemment pour $x \neq 2$ et $x = 2$. Vérifions les 3 conditions de la continuité :

1. f est définie en $a = 2$, ce qui est vrai car $f(2) = 4$.
2. $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ existe, ce qui est vrai car $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim\limits_{x \to 2}(x+2) = 4.$
3. $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$?
   Vrai car $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4 = f(2)$.

Solution - Exercice 3

Les trois conditions étant satisfaites, nous pouvons conclure que $f(x)$ est continue en $a = 2$.

Solution - Exercice 4

Solution :

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{5x}{(x+3)^3} = \frac{5(-3)}{(-3+3)^3} = \frac{-15}{0}$$

Solution - Exercice 4

Solution :

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{5x}{(x+3)^3} = \frac{5(-3)}{(-3+3)^3} = \frac{-15}{0}$$

La limite à gauche n'existe pas car le dénominateur devient nul.

Solution - Exercice 4

Solution :

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{5x}{(x+3)^3} = \frac{5(-3)}{(-3+3)^3} = \frac{-15}{0}$$

La limite à gauche n'existe pas car le dénominateur devient nul.

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{5x}{(x+3)^3} = \frac{5(-3)}{(-3+3)^3} = \frac{-15}{0}$$

Solution - Exercice 4

Solution :

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{5x}{(x+3)^3} = \frac{5(-3)}{(-3+3)^3} = \frac{-15}{0}$$

La limite à gauche n'existe pas car le dénominateur devient nul.

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{5x}{(x+3)^3} = \frac{5(-3)}{(-3+3)^3} = \frac{-15}{0}$$

La limite à droite n'existe pas non plus car le dénominateur devient nul.

Solution - Exercice 4

Solution :

$$\lim_{x \to -3^-} \frac{5x}{(x+3)^3} = \frac{5(-3)}{(-3+3)^3} = \frac{-15}{0}$$

La limite à gauche n'existe pas car le dénominateur devient nul.

$$\lim_{x \to -3^+} \frac{5x}{(x+3)^3} = \frac{5(-3)}{(-3+3)^3} = \frac{-15}{0}$$

La limite à droite n'existe pas non plus car le dénominateur devient nul.
Graphiquement, cela signifie que la fonction $f(x)$ a une discontinuité en $x = -3$. En effet, elle présente une asymptote verticale à cet endroit. **Comment l'esquisser ?**

Pour déterminer le signe de l'asymptote verticale lorsque x approche $a = -3$ pour la fonction

$$f(x) = \frac{5x}{(x+3)^3},$$

Nous devons analyser les limites à gauche et à droite de -3.

$$\begin{aligned}\lim_{x \to -3^-} f(x) &= \lim_{x \to -3^-} \frac{5x}{(x+3)^3} \\ &= \frac{5(-3^-)}{((-3^-)+3)^3} \\ &= \frac{-15}{0^-} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

Division par 0 : Il se passe quoi graphiquement ?

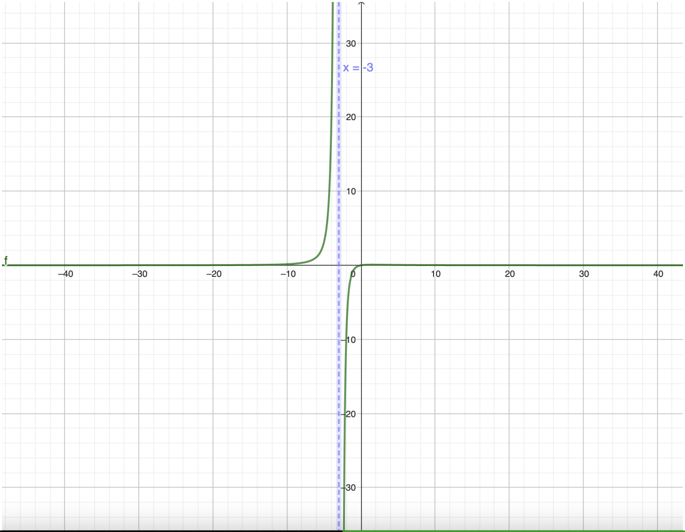
Imaginez que vous ayez 15 euros, que vous souhaitez partager avec des amis.

1. Si vous avez 10 amis, chaque ami reçoit 1,5 euros.
2. Si vous avez 3 amis, chaque ami reçoit 5 euros.
3. Si vous avez 2 amis, chaque ami reçoit 7,5 euros.
4. Si vous avez 1 ami, chaque ami reçoit 15 euros.

Vous pouvez voir que plus le nombre d'amis diminue, plus chaque ami reçoit une part d'argent plus importante.
L'idée mathématique derrière cela est que lorsque le nombre d'amis ("x") approche de zéro, la quantité d'argent que chaque ami reçoit ($\frac{15}{x}$) devient de plus en plus grande, et cela peut être considéré comme "tendant vers l'infini".

$$\begin{aligned}\lim_{x\to -3^+} f(x) &= \lim_{x\to -3^+} \frac{5x}{(x+3)^3}\\ &= \frac{5(-3^+)}{((-3^+)+3)^3}\\ &= \frac{-15}{0^+}\\ &= -\infty\end{aligned}$$

Graphique de l'exercice 4



Sondage Wooclap

1 **Allez sur wooclap.com**

2 **Entrez le code d'événement dans le bandeau supérieur**

Code d'événement
XONUKO

Questionnaire UNIGE