CAFE-S - Algèbre Linéaire dans $\mathbb{R}^2$

Pedro GIESTEIRA, Charlène MICHELOT, Marie YAZIJI

Vendredi 15 septembre 2023

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

Sommaire

Définition d'un vecteur

Définition

*Un **vecteur** est la donnée d'un sens, d'une direction et d'une longueur, que nous appelons norme.*

Définition d'un vecteur

Définition

*Un **vecteur** est la donnée d'un sens, d'une direction et d'une longueur, que nous appelons norme.*

Remarque

Un vecteur est représenté par une flèche.

Définition d'un vecteur

Définition

*Un **vecteur** est la donnée d'un sens, d'une direction et d'une longueur, que nous appelons norme.*

Remarque

Un vecteur est représenté par une flèche.

Terminologie

*Le vecteur qui n'a ni sens, ni direction et norme 0 est appelé **vecteur nul** et est noté $\overrightarrow{0}$.*

Égalité entre deux vecteurs

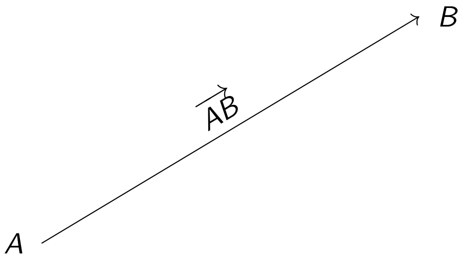
Remarque

Deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils possèdent le même sens, la même direction et des normes égales.

Vecteur entre deux points

Définition

Soient A et B deux points dans le plan.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le segment orienté de A vers B représentant la translation envoyant A sur B.



Coordonnées d'un vecteur entre deux points

À partir de la définition d'un vecteur entre deux points, nous pouvons définir les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$:

Coordonnées d'un vecteur entre deux points

À partir de la définition d'un vecteur entre deux points, nous pouvons définir les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{AB}$:
Si $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ sont deux points du plan, alors le vecteur $\overrightarrow{AB}$ possède les coordonnées suivantes :

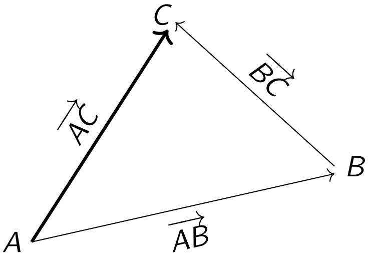
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Relation de Chasles

Proposition (Relation de Chasles)

Pour tout triplet de points A, B et C :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$



Relation de Chasles

En effet :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix}$$

Relation de Chasles

En effet :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Relation de Chasles

En effet :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_C - x_B \\ y_C - y_B \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \end{pmatrix} \\ &= \overrightarrow{AC}.\end{aligned}$$

Vecteurs algébriques

Remarque

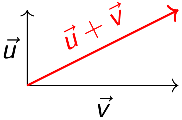
Dorénavant, nous adopterons la convention suivante :
Étant donné $V = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$*, nous définissons :*

$$\vec{v} := \overrightarrow{OV} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}.$$

Opérations sur les vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

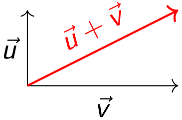
- **Somme de vecteurs :**



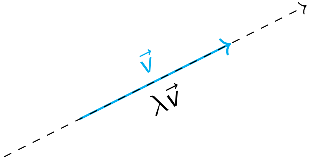
Opérations sur les vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan et $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

- **Somme de vecteurs :**



- **Multiplication par un réel :**



Multiplication par un réel

Remarque

Soit $\vec{v}$ un vecteur du plan et $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\lambda\vec{v}$ est le vecteur qui a la même direction que $\vec{v}$, qui a le même sens que $\vec{v}$ si $\lambda > 0$ et le sens opposé si $\lambda < 0$, et dont la norme est égale à $|\lambda|$ fois la norme de $\vec{v}$.

Opérations en termes de coordonnées

Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Opérations en termes de coordonnées

Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **Somme de vecteurs :** $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$

Opérations en termes de coordonnées

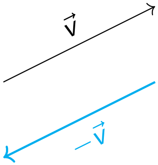
Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- **Somme de vecteurs :** $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \end{pmatrix}$
- **Multiplication par un réel :** $\lambda \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$

Opposé d'un vecteur

Définition

Soit $\vec{v}$ un vecteur du plan.
L'**opposé** du vecteur $\vec{v}$ est le vecteur $(-1)\vec{v}$, noté $-\vec{v}$.



Combinaison linéaire

À partir des opérations de somme de vecteurs et de multiplication par un réel, nous pouvons définir :

Combinaison linéaire

À partir des opérations de somme de vecteurs et de multiplication par un réel, nous pouvons définir :

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.
Une **combinaison linéaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un vecteur de la forme $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Colinéarité

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan sont **colinéaires** s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \alpha\vec{u}$.

Colinéarité

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan sont **colinéaires** s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{v} = \alpha\vec{u}$.

Remarque

Il découle de la définition qu'un vecteur $\vec{v}$ et ses multiples $\lambda\vec{v}$ sont colinéaires.

Propriétés algébriques

Proposition

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs du plan et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $0\,\vec{u} = \vec{0}$ *et* $\lambda\,\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$

Propriétés algébriques

Proposition

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs du plan et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $0\,\vec{u} = \vec{0}$ *et* $\lambda\,\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

Propriétés algébriques

Proposition

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs du plan et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $0\,\vec{u} = \vec{0}$ *et* $\lambda\,\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$

Propriétés algébriques

Proposition

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs du plan et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $0\,\vec{u} = \vec{0}$ *et* $\lambda\,\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
4. $\overrightarrow{0} + \vec{u} = \vec{u}$

Propriétés algébriques

Proposition

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs du plan et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $0\,\vec{u} = \vec{0}$ *et* $\lambda\,\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
4. $\overrightarrow{0} + \vec{u} = \vec{u}$
5. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{0}$

Propriétés algébriques

Proposition

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs du plan et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $0\,\vec{u} = \vec{0}$ *et* $\lambda\,\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
4. $\overrightarrow{0} + \vec{u} = \vec{u}$
5. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{0}$
6. $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$

Propriétés algébriques

Proposition

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs du plan et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $0\,\vec{u} = \vec{0}$ *et* $\lambda\,\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
4. $\overrightarrow{0} + \vec{u} = \vec{u}$
5. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{0}$
6. $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
7. $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$

Propriétés algébriques

Proposition

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs du plan et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $0\,\vec{u} = \vec{0}$ *et* $\lambda\,\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
4. $\overrightarrow{0} + \vec{u} = \vec{u}$
5. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{0}$
6. $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
7. $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$
8. $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$

Propriétés algébriques

Proposition

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs du plan et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $0\,\vec{u} = \vec{0}$ *et* $\lambda\,\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
4. $\overrightarrow{0} + \vec{u} = \vec{u}$
5. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{0}$
6. $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
7. $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$
8. $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$
9. $1\vec{u} = \vec{u}$

Propriétés algébriques

Proposition

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs du plan et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $0\,\vec{u} = \vec{0}$ *et* $\lambda\,\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$
2. $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
3. $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
4. $\overrightarrow{0} + \vec{u} = \vec{u}$
5. $\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{0}$
6. $\lambda(\vec{u} + \vec{v}) = \lambda\vec{u} + \lambda\vec{v}$
7. $(\lambda + \mu)\vec{v} = \lambda\vec{v} + \mu\vec{v}$
8. $\lambda(\mu\vec{v}) = (\lambda\mu)\vec{v}$
9. $1\vec{u} = \vec{u}$
10. $(-\lambda)\vec{u} = \lambda(-\vec{u}) = -(\lambda\vec{u})$

Norme d'un vecteur

Définition

Une **norme** sur $\mathbb{R}^2$ est une application $||\cdot|| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant, pour tous $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $||\,\vec{v}\,|| = 0 \iff \vec{v} = \overrightarrow{0}$
2. $||\,\lambda\vec{v}\,|| = |\,\lambda\,|\,||\,\vec{v}\,||$
3. $||\,\vec{u} + \vec{v}\,|| \leq ||\,\vec{u}\,|| + ||\,\vec{v}\,||$

Terminologie

*La troisième propriété se nomme l'**inégalité triangulaire**.*

Norme d'un vecteur

Remarque

Notre choix de norme sera :

$$||\vec{v}|| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}.$$

Exemple

Exemple

$$\left\| \begin{pmatrix} -4 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-4)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}$$

Exemple

Exemple

$$\left\| \begin{pmatrix} -4 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-4)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{16 + 2}$$

Exemple

Exemple

$$\left\| \begin{pmatrix} -4 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-4)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{16 + 2}$$
$$= \sqrt{18}$$

Exemple

Exemple

$$\left\| \begin{pmatrix} -4 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-4)^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{16 + 2}$$
$$= \sqrt{18}$$
$$= 3\sqrt{2}$$

Produit scalaire

Définition

Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs.
Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par :

$$\langle \vec{u} \,|\, \vec{v} \rangle := u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Produit scalaire

Définition

Soient $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ deux vecteurs.
Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donné par :

$$\langle \vec{u} \,|\, \vec{v} \rangle := u_1 v_1 + u_2 v_2.$$

Remarque

Nous laisserons tomber la notation $\vec{u} \cdot \vec{v}$, au profit de la notation $\langle \vec{u} \,|\, \vec{v} \rangle$.

Exemple

Exemple

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle = (-1) \cdot (-6) + 7 \cdot (-3)$$

Exemple

Exemple

$$\left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \end{pmatrix} \right\rangle = (-1) \cdot (-6) + 7 \cdot (-3)$$
$$= -15$$

Propriétés du produit scalaire

Proposition

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\langle \vec{v} \,|\, \vec{v} \rangle = ||\,\vec{v}\,||^2$

Propriétés du produit scalaire

Proposition

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\langle \vec{v} \,|\, \vec{v} \rangle = ||\,\vec{v}\,||^2$
2. *Le produit scalaire est* ***bilinéaire*** *:*
   - $\langle \vec{u} + \vec{v} \,|\, \vec{w} \rangle = \langle \vec{u} \,|\, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v} \,|\, \vec{w} \rangle$

Propriétés du produit scalaire

Proposition

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs et $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle = || \vec{v} ||^2$
2. *Le produit scalaire est **bilinéaire** :*
   - $\langle \vec{u} + \vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle \vec{u} | \vec{w} \rangle + \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$
   - $\langle \vec{u} | \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle + \langle \vec{u} | \vec{w} \rangle$

Propriétés du produit scalaire

Proposition

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs et $\alpha \in \mathbb{R}$.

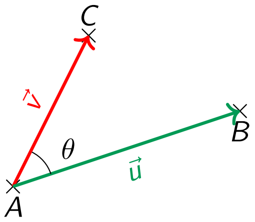
1. $\langle \vec{v} | \vec{v} \rangle = || \vec{v} ||^2$
2. *Le produit scalaire est* ***bilinéaire*** *:*
   - $\langle \vec{u} + \vec{v} | \vec{w} \rangle = \langle \vec{u} | \vec{w} \rangle + \langle \vec{v} | \vec{w} \rangle$
   - $\langle \vec{u} | \vec{v} + \vec{w} \rangle = \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle + \langle \vec{u} | \vec{w} \rangle$
   - $\langle \alpha\, \vec{u} | \vec{v} \rangle = \langle \vec{u} | \alpha\, \vec{v} \rangle = \alpha\, \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle$
3. $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = \langle \vec{v} | \vec{u} \rangle$
4. $\left\langle \vec{v} \middle| \overrightarrow{0} \right\rangle = 0$

Une autre formulation du produit scalaire

Théorème

Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs et $\theta \in [0, \pi]$ l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors :

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = || \, \vec{u} \, || \; || \, \vec{v} \, || \cos \theta.$$



Utilité du produit scalaire : orthogonalité

Définition

Deux vecteurs non-nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un angle droit, ce qui est noté $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Utilité du produit scalaire : orthogonalité

Définition

Deux vecteurs non-nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un angle droit, ce qui est noté $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Proposition

$\vec{u} \perp \vec{v}$ avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non-nuls $\iff \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = 0.$

Utilité du produit scalaire : orthogonalité

Définition

Deux vecteurs non-nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un angle droit, ce qui est noté $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Proposition

$\vec{u} \perp \vec{v}$ avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non-nuls $\iff \langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = 0$.

En effet, si $\vec{u} \perp \vec{v}$, alors $\theta = \pi/2$, ce qui nous conduit directement à :

$$\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = || \vec{u} || \, || \vec{v} || \cos \frac{\pi}{2} = 0.$$

Utilité du produit scalaire : la mesure d'un angle

Corollaire

Soient deux vecteurs non-nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et notons θ l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors :

$$\cos\theta = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{||\,\vec{u}\,||\;||\,\vec{v}\,||}.$$

Utilité du produit scalaire : la mesure d'un angle

Corollaire

Soient deux vecteurs non-nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et notons θ l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors :

$$\cos\theta = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{||\,\vec{u}\,||\;||\,\vec{v}\,||}.$$

En effet, par le Théorème précédent :

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u} \,|\, \vec{v} \rangle}{||\,\vec{u}\,||\;||\,\vec{v}\,||}.$$

Nous concluons en utilisant la définition du produit scalaire.

Utilité du produit scalaire : la mesure d'un angle

Corollaire

Soient deux vecteurs non-nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et notons θ l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors :

$$\cos\theta = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{||\,\vec{u}\,||\ ||\,\vec{v}\,||}.$$

En effet, par le Théorème précédent :

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u} \,|\, \vec{v} \rangle}{||\,\vec{u}\,||\ ||\,\vec{v}\,||}.$$

Nous concluons en utilisant la définition du produit scalaire.

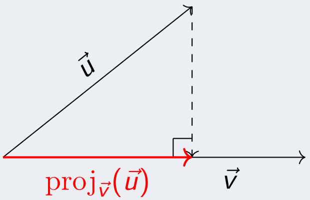
Remarque

Il nous est ainsi possible de déterminer la mesure de l'angle θ.

Utilité du produit scalaire : projection orthogonale

Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non-nuls.
La **projection orthogonale** de $\vec{u}$ sur $\vec{v}$ est le vecteur :



Utilité du produit scalaire : projection orthogonale

Proposition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non-nuls.
La projection orthogonale du vecteur $\vec{u}$ sur le vecteur $\vec{v}$ est donnée par :

$$\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\langle \vec{u} \,|\, \vec{v} \rangle}{||\,\vec{v}\,||^2}\,\vec{v}.$$

Utilité du produit scalaire : projection orthogonale

En effet, nous pouvons poser $\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \lambda\vec{v}$. En exploitant $\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) \perp \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) - \vec{u}$, nous déduisons que :

$$\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) \perp \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) - \vec{u} \overset{\text{Théorème}}{\iff} \langle \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) \,|\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) - \vec{u} \rangle = 0$$

Utilité du produit scalaire : projection orthogonale

En effet, nous pouvons poser $\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \lambda \vec{v}$. En exploitant $\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) \perp \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) - \vec{u}$, nous déduisons que :

$$\begin{aligned} \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) \perp \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) - \vec{u} &\overset{\text{Théorème}}{\Longleftrightarrow} \langle \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) \,|\, \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) - \vec{u} \rangle = 0 \\ &\overset{\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \lambda \vec{v}}{\Longleftrightarrow} \langle \lambda \vec{v} \,|\, \lambda \vec{v} - \vec{u} \rangle = 0 \end{aligned}$$

Utilité du produit scalaire : projection orthogonale

En effet, nous pouvons poser $\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \lambda\vec{v}$. En exploitant $\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) \perp \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) - \vec{u}$, nous déduisons que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) \perp \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) - \vec{u} &\overset{\text{Théorème}}{\iff} \langle \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) \,|\, \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) - \vec{u} \rangle = 0 \\
&\overset{\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \lambda\vec{v}}{\iff} \langle \lambda\vec{v} \,|\, \lambda\vec{v} - \vec{u} \rangle = 0 \\
&\overset{\text{Bilinéarité}}{\iff} \lambda^2 \langle \vec{v} \,|\, \vec{v} \rangle - \lambda \langle \vec{v} \,|\, \vec{u} \rangle = 0
\end{aligned}$$

Utilité du produit scalaire : projection orthogonale

En effet, nous pouvons poser $\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \lambda\vec{v}$. En exploitant $\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) \perp \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) - \vec{u}$, nous déduisons que :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) \perp \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) - \vec{u} &\overset{\text{Théorème}}{\iff} \langle \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) \,|\, \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) - \vec{u} \rangle = 0 \\
&\overset{\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \lambda\vec{v}}{\iff} \langle \lambda\vec{v} \,|\, \lambda\vec{v} - \vec{u} \rangle = 0 \\
&\overset{\text{Bilinéarité}}{\iff} \lambda^2 \langle \vec{v} \,|\, \vec{v} \rangle - \lambda \langle \vec{v} \,|\, \vec{u} \rangle = 0 \\
&\iff \lambda \left(\langle \vec{v} \,|\, \vec{v} \rangle - \langle \vec{v} \,|\, \vec{u} \rangle \right) = 0
\end{aligned}
$$

Utilité du produit scalaire : projection orthogonale

En effet, nous pouvons poser $\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \lambda\vec{v}$. En exploitant $\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) \perp \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) - \vec{u}$, nous déduisons que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) \perp \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) - \vec{u} &\overset{\text{Théorème}}{\iff} \langle \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) \,|\, \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) - \vec{u} \rangle = 0 \\
&\overset{\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u})=\lambda\vec{v}}{\iff} \langle \lambda\vec{v} \,|\, \lambda\vec{v} - \vec{u} \rangle = 0 \\
&\overset{\text{Bilinéarité}}{\iff} \lambda^2 \langle \vec{v} \,|\, \vec{v} \rangle - \lambda \langle \vec{v} \,|\, \vec{u} \rangle = 0 \\
&\iff \lambda \left(\langle \vec{v} \,|\, \vec{v} \rangle - \langle \vec{v} \,|\, \vec{u} \rangle \right) = 0 \\
&\overset{\lambda \neq 0}{\iff} \lambda \langle \vec{v} \,|\, \vec{v} \rangle - \langle \vec{v} \,|\, \vec{u} \rangle = 0 \\
&\overset{\text{En isolant}}{\iff} \lambda = \frac{\langle \vec{u} \,|\, \vec{v} \rangle}{||\,\vec{v}\,||^2}
\end{aligned}$$

Utilité du produit scalaire : projection orthogonale

En effet, nous pouvons poser $\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \lambda\vec{v}$. En exploitant $\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) \perp \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) - \vec{u}$, nous déduisons que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) \perp \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) - \vec{u} &\overset{\text{Théorème}}{\iff} \langle \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) \,|\, \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) - \vec{u} \rangle = 0 \\
&\overset{\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \lambda\vec{v}}{\iff} \langle \lambda\vec{v} \,|\, \lambda\vec{v} - \vec{u} \rangle = 0 \\
&\overset{\text{Bilinéarité}}{\iff} \lambda^2 \langle \vec{v} \,|\, \vec{v} \rangle - \lambda \langle \vec{v} \,|\, \vec{u} \rangle = 0 \\
&\iff \lambda \left(\langle \vec{v} \,|\, \vec{v} \rangle - \langle \vec{v} \,|\, \vec{u} \rangle \right) = 0 \\
&\overset{\lambda \neq 0}{\iff} \lambda \langle \vec{v} \,|\, \vec{v} \rangle - \langle \vec{v} \,|\, \vec{u} \rangle = 0 \\
&\overset{\text{En isolant}}{\iff} \lambda = \frac{\langle \vec{u} \,|\, \vec{v} \rangle}{||\,\vec{v}\,||^2} \\
&\overset{\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \lambda\vec{v}}{\implies} \mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{\langle \vec{u} \,|\, \vec{v} \rangle}{||\,\vec{v}\,||^2}\,\vec{v}
\end{aligned}$$

Exercice

Étant donné deux vecteurs non-nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, montrer que $\langle \vec{u} | \vec{v} \rangle = 0 \implies \vec{u} \perp \vec{v}$.

Exercice

Étant donné deux vecteurs non-nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, calculer $|| \operatorname{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}) ||$.

Exercice

Considérons $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sont-ils orthogonaux ? Si la réponse est non, calculer l'angle θ entre eux.

Exercice

Calculer les coordonnées et la norme du projeté orthogonal de $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ sur $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Correction I

Notation des vecteurs

Remarque

Dans un contexte géométrique, nous notons le vecteur entre deux points A et B avec une flèche, afin de faire la distinction avec la distance AB. Dans le contexte de l'algèbre linéaire, cette ambiguïté n'existe plus. Donc, désormais, quand nous considérerons les vecteurs comme des objets d'algèbre linéaire, nous n'écrirons plus les vecteurs avec des flèches.

Les principes

Définition

Une équation vectorielle est une équation où l'inconnue est un vecteur.

Exemple

- $$2 \cdot v + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 3 \cdot v, v \in \mathbb{R}^2$$
- $$3 \cdot \left\langle w \middle| \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = 0, w \in \mathbb{R}^2$$

L'équation vectorielle d'une droite

Définition

Une droite d passant par le point A et B est l'ensemble de tous les points P tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AP}$ sont colinéaires.

L'équation vectorielle d'une droite

Il suit donc que les points P sur la droite d satisfont l'équation vectorielle suivante, pour un paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$ donné

$$\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} \iff \underbrace{\overrightarrow{OP}}_{w} = \overrightarrow{OA} + \lambda \underbrace{\overrightarrow{AB}}_{v}$$

- La droite est l'ensemble de toutes les solutions de l'équation (1) , où $w \in \mathbb{R}^2$ est l'inconnue :

$$w = a + \lambda v \tag{1}$$

- v est appelé *le vecteur directeur de la droite d* et a est *le vecteur position*.

Exemple

Considérons la droite d passant par $(0, 3)$ et $(4, 12)$. Trouver tous les points contenus dans cette droite revient à résoudre l'équation mentionnée plus haut, où $v = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$. Nous trouvons donc

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Exemple

Il est donc possible de tester si un point donné est dans la droite : il suffit de trouver un λ pour lequel l'équation est satisfaite.

- Soit $w = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \end{pmatrix}$. Il est sur la droite car il satisfait l'équation pour $\lambda = 1$
- Soit $w = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$. Pour trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ qui satisfait l'équation, nous devons résoudre le système

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 5 = 0 + \lambda \cdot 4 \\ 12 = 3 + \lambda \cdot 9 \end{cases}$$

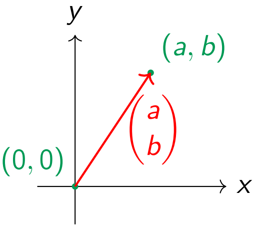
$$\iff \begin{cases} \lambda = \frac{5}{4} \\ \lambda = 1 \end{cases} \implies \text{le système n'a pas de solutions}$$

Remarque par rapport à l'exercice 1

Remarque

Dans notre cas, les points du plan et les vecteurs du plan sont "la même chose", dans le sens où nos vecteurs sont basés en $O = (0, 0)$, donc les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{OP}$ sont égales aux coordonnées du point P.

En particulier, $(a, b) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$



Exercice 1

Formuler les équations vectorielles et résoudre les problèmes suivants :

1. Soit d une droite passant par $(0, 2)$ et $(2, 4)$.
   - Trouver un vecteur directeur de cette droite
   - Parmi la liste de points suivants, déterminer lesquels appartiennent à la droite : (1,1) et (1,3)
2. Trouver l'ensemble des vecteurs perpendiculaires à $\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$
3. Trouver l'intersection entre la droite passant par $(3, 3)$ et $(0, 0)$ et la droite perpendiculaire à celle-ci passant par $(5, 1)$

Exercice 2

Considérons $v \in \mathbb{R}^3$ un vecteur directeur de la droite d passant par $(0,3,1)$ et $(1,4,1)$. Quel objet géométrique est décrit par l'équation

$$w = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda v$$

et quelle est sa relation avec la droite d ?

Support de révision

Figure – Géométrie vectorielle, 3ème année du collège

Définition

Définition

Une fonction linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *satisfait deux propriétés :*

1. $f(v + w) = f(v) + f(w), \forall v, w \in \mathbb{R}^2$
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v), \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^2$

Définition

Définition

Une fonction linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *satisfait deux propriétés :*

1. $f(v+w) = f(v) + f(w), \forall v, w \in \mathbb{R}^2$
2. $f(\lambda v) = \lambda f(v), \forall \lambda \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}^2$

Remarque

Cette définition implique directement que l'image de $(0,0)$ *par une fonction linéaire est toujours* $(0,0)$ *:*

$$f(0) = f(0 \cdot v) = 0 \cdot f(v) = 0$$

Exemple 1

Vérifions que la fonction suivante est linéaire

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 2 \cdot b + a \\ b - a \end{pmatrix} \end{array}$$

Exemple 1

Soit $v = (a_1, b_1)$ et $u = (a_2, b_2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$

1. $f(v + w) = f(v) + f(w)$

$$\begin{aligned}
f(v+u) &= f\left(\begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ b_1 + b_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} 2 \cdot (b_1 + b_2) + (a_1 + a_2) \\ (b_1 + b_2) - (a_1 + a_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 \cdot b_1 + a_1 \\ b_1 - a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cdot b_2 + a_2 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} \\
&= f(v) + f(u)
\end{aligned}$$

Exemple 1

2. $f(\lambda v) = \lambda f(v)$

$$\begin{aligned} f(\lambda u) &= f\left(\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda b_1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} 2 \cdot \lambda b_1 + \lambda a_1 \\ \lambda b_1 - \lambda a_1 \end{pmatrix} \\ &= \lambda f(u) \end{aligned}$$

Exemple 2

Pour montrer qu'une fonction n'est pas linéaire, il suffit de montrer qu'une des deux conditions n'est pas vérifiée.

$$\begin{array}{cccl} g: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a+b \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Montrons que la deuxième condition n'est pas satisfaite

- $g(\lambda u) = g\left(\begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda b_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \lambda b_1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $\lambda g(u) = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda b_1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 + \lambda b_1 \\ \lambda \end{pmatrix}$

Motivation

L'idée derrière cette définition est de garder une certaine structure dans l'image. En effet, la somme de deux vecteurs dans l'image reste aussi dans l'image, et de même pour le produit par un scalaire.

Ceci n'est pas toujours le cas pour des fonctions non-linéaires :

Exemple

Prenons $f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x+y \\ 1 \end{pmatrix}$. *Nous voyons que* $(1,1)$ *est dans l'image de* f*, mais* $(2,2)$ *ne l'est pas. Et donc* $f(\mathbb{R}^2)$ *n'a pas la structure présentée plus haut pour* $\mathbb{R}^2$.

La symétrie par l'axe des abscisses

Considérons σ_x la symétrie par l'axe des abscisses. Trouvons la formule de cette fonction :

La symétrie par l'axe des abscisses

Considérons σ_x la symétrie par l'axe des abscisses. Trouvons la formule de cette fonction :

- Par définition, la symétrie d'un point sur l'axe de symétrie est le point lui-même

$$\Longrightarrow \sigma_x\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La symétrie par l'axe des abscisses

Considérons σ_x la symétrie par l'axe des abscisses. Trouvons la formule de cette fonction :

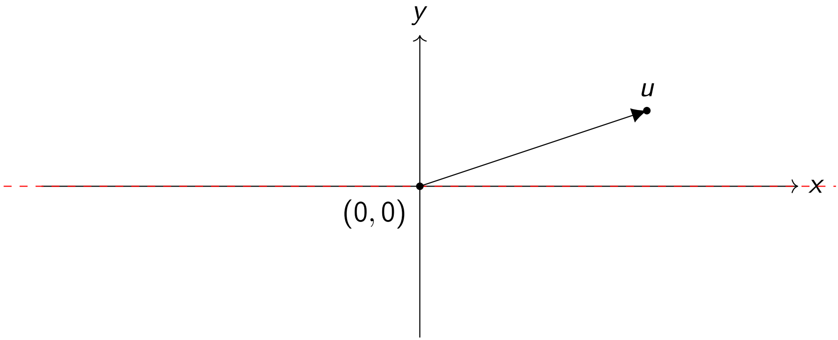
- Par définition, la symétrie d'un point sur l'axe de symétrie est le point lui-même

$$\Longrightarrow \sigma_x\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

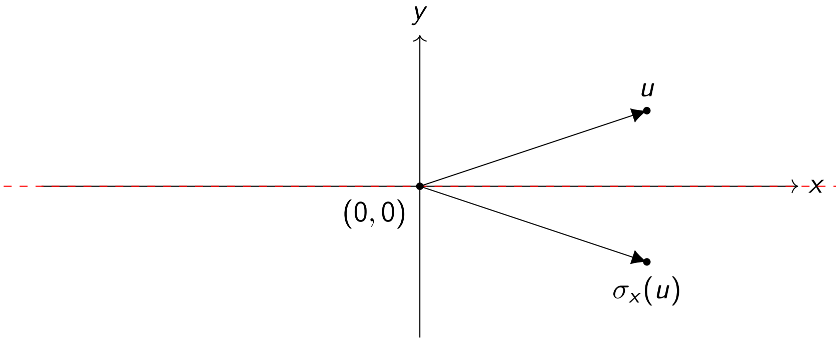
- La symétrie inverse le sens des vecteurs sur l'axe des ordonnées.

$$\Longrightarrow \sigma_x\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

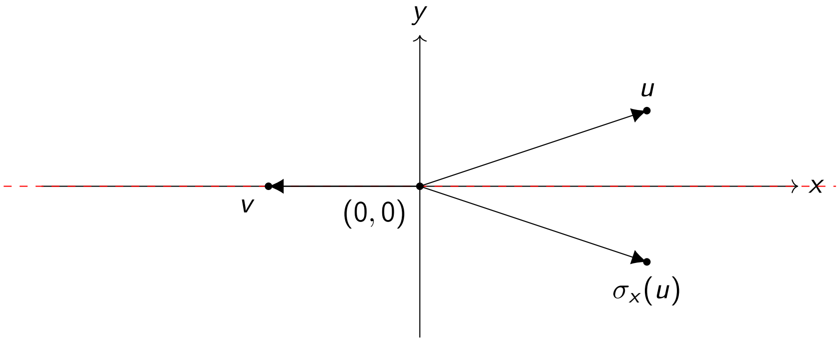
La symétrie par l'axe des abscisses



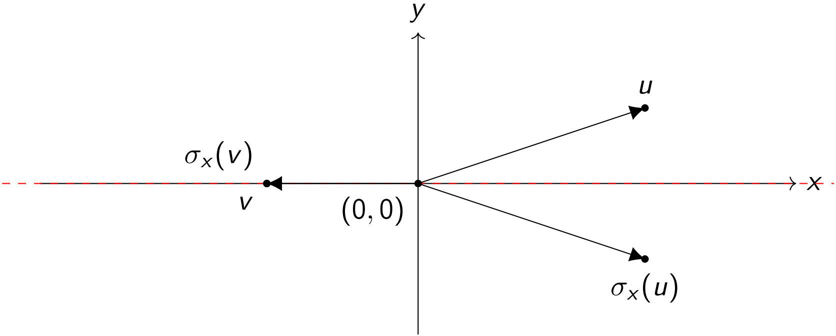
La symétrie par l'axe des abscisses



La symétrie par l'axe des abscisses



La symétrie par l'axe des abscisses



La symétrie par l'axe des abscisses

De plus, la symétrie est linéaire (nous pouvons utiliser le théorème de Thalès pour s'en convaincre). Nous avons donc :

$$\sigma_x\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \sigma_x\left(a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

La symétrie par l'axe des abscisses

De plus, la symétrie est linéaire (nous pouvons utiliser le théorème de Thalès pour s'en convaincre). Nous avons donc :

$$\begin{aligned}\sigma_x\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) &= \sigma_x\left(a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\ &\overset{\text{lin.}}{=} \sigma_x\left(a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \sigma_x\left(b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\end{aligned}$$

La symétrie par l'axe des abscisses

De plus, la symétrie est linéaire (nous pouvons utiliser le théorème de Thalès pour s'en convaincre). Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\sigma_x\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) &= \sigma_x\left(a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{\text{lin.}}{=} \sigma_x\left(a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \sigma_x\left(b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{\text{lin.}}{=} a \cdot \sigma_x\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + b \cdot \sigma_x\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

La symétrie par l'axe des abscisses

De plus, la symétrie est linéaire (nous pouvons utiliser le théorème de Thalès pour s'en convaincre). Nous avons donc :

$$\begin{aligned}
\sigma_x\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) &= \sigma_x\left(a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{\text{lin.}}{=} \sigma_x\left(a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \sigma_x\left(b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \\
&\overset{\text{lin.}}{=} a \cdot \sigma_x\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + b \cdot \sigma_x\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a \\ -b \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

L'importance de la base

Nous remarquons qu'une fonction linéaire est complètement déterminée par son comportement sur la base choisie. Nous pouvons utiliser cette propriété pour associer à chaque fonction linéaire une matrice.

La matrice associée à une fonction linéaire

Considérons $e_1 = (1,0)$ et $e_2 = (0,1)$ et f une fonction linéaire.
Soient $f(e_1)$ et $f(e_2)$ les images de e_1 et e_2 par f.
Soit $v = (a,b) = ae_1 + be_2$. Nous avons alors

$$f(v) = f(ae_1 + be_2) \overset{\text{lin}}{=} a \cdot f(e_1) + b \cdot f(e_2) = (f(e_1)|f(e_2)) \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Définition

Soit f une fonction linéaire et $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ une base. La matrice associée à f est $M_f = (f(e_1)|f(e_2))$

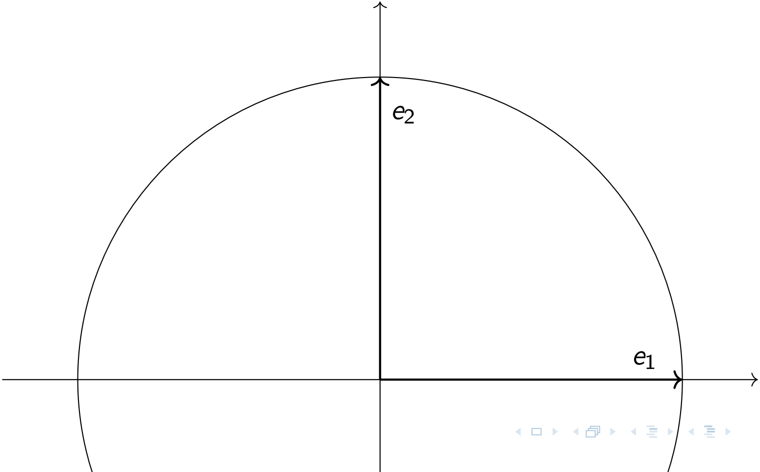
La symétrie par l'axe des abscisses

Nous avons alors que la matrice associée à la symétrie par rapport à l'axe des abscisses est

$$M_{\sigma_x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

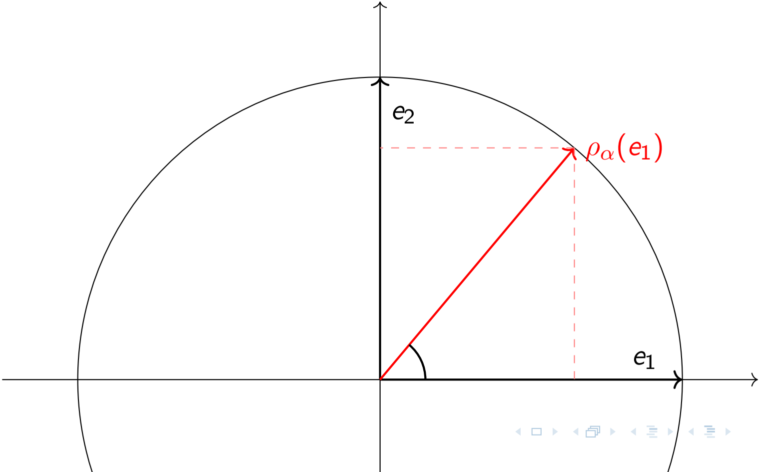
Rotation

De la même manière, nous pouvons établir la formule de ρ_α, la rotation d'angle α, en étudiant son comportement sur la base de $\mathbb{R}^2$



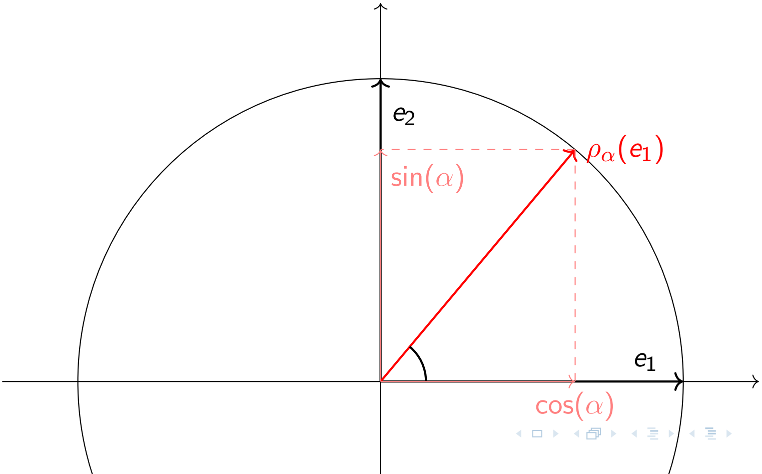
Rotation

De la même manière, nous pouvons établir la formule de ρ_α, la rotation d'angle α, en étudiant son comportement sur la base de $\mathbb{R}^2$



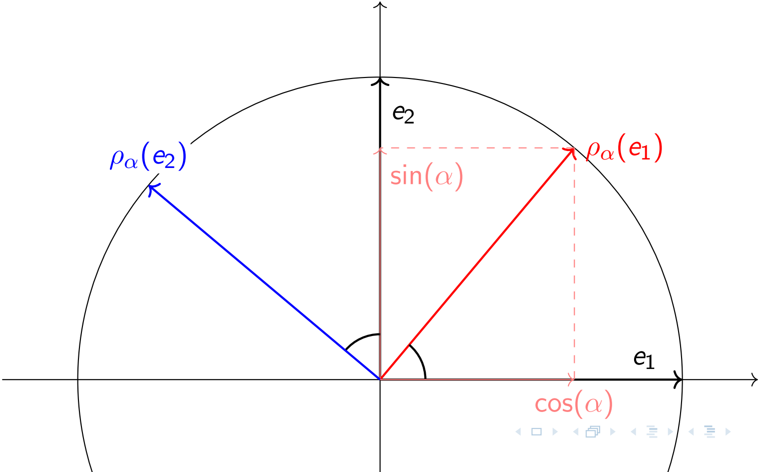
Rotation

De la même manière, nous pouvons établir la formule de ρ_α, la rotation d'angle α, en étudiant son comportement sur la base de $\mathbb{R}^2$



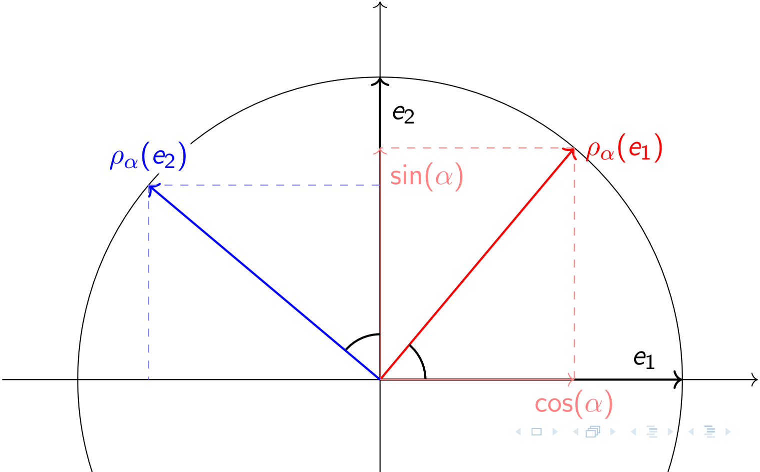
Rotation

De la même manière, nous pouvons établir la formule de ρ_α, la rotation d'angle α, en étudiant son comportement sur la base de $\mathbb{R}^2$



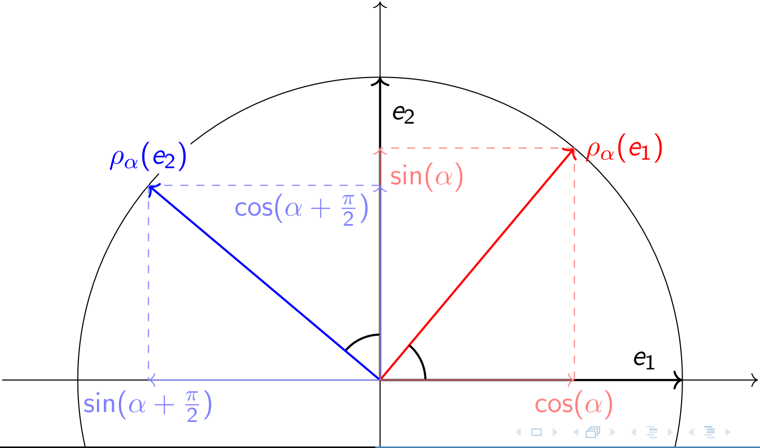
Rotation

De la même manière, nous pouvons établir la formule de ρ_α, la rotation d'angle α, en étudiant son comportement sur la base de $\mathbb{R}^2$



Rotation

De la même manière, nous pouvons établir la formule de ρ_α, la rotation d'angle α, en étudiant son comportement sur la base de $\mathbb{R}^2$



Rotation

Nous avons donc que la matrice de rotation d'angle α est

$$\Longrightarrow M_{\rho_\alpha} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

L'homothétie

Une *homothétie* de centre $(0,0)$ est la transformation linéaire qui agrandit ou réduit une figure selon un rapport $k \in \mathbb{R}$ par rapport au centre.

$$h_{(0,0)} : \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$$

Nous avons la matrice $M_{h_{(0,0)}} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

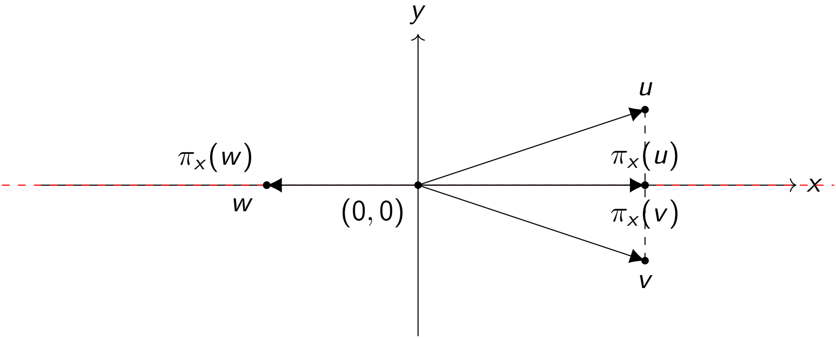
Exercice 1

Déterminer si les fonctions suivantes sont linéaires et, si cela est le cas, trouver les matrices correspondantes

1. $id : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto x$, la fonction identité
2. $T_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x \mapsto x + v$, la translation de vecteur v
3. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a^2 \\ a \cdot b \end{pmatrix}$
4. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a + b \\ a - b \end{pmatrix}$

Exercice 2

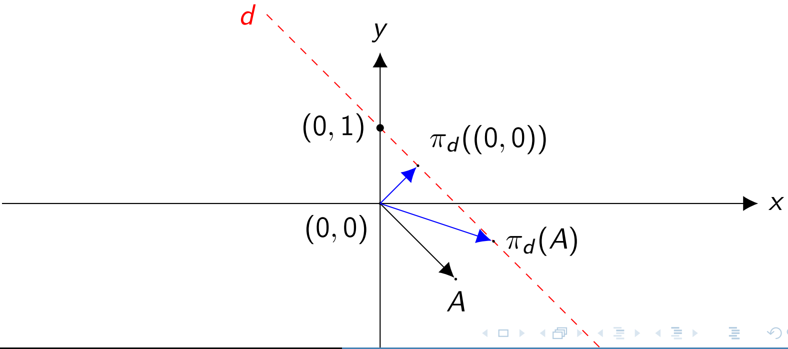
- Montrer que π_x la projection orthogonale sur l'axe des abscisses est une fonction linéaire et trouver la matrice associée à cette transformation.



Exercice 2

- Que peut-on dire graphiquement sur la linéarité de π_d, la projection orthogonale sur la droite d d'équation

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Support de révision

Figure – Algèbre linéaire, dès page 111, 4ème année de collège

Sondage sur votre compréhension

https://app.wooclap.com/QGSOYR?from=instruction-slide

Feedback