Correction des exercices de calcul matriciel

16 septembre 2023

Exercice 1. *Trouver si possible $A+B$, $A-B$, $2A$ et $-3B$.*

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

   Correction :

$$A + B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$2A = 2\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \tag{3}$$

$$-3B = -3\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -3 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} \tag{4}$$

2. $A = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

   Correction :

$$A + B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -5 \\ -9 & 4 \end{pmatrix} \tag{6}$$

$$2A = 2\begin{pmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -2 \\ 4 & 0 \\ -6 & 8 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$-3B = -3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -3 \\ 3 & -15 \\ -18 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

3. $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Correction :

$$A + B \text{ n'est pas définie.} \tag{9}$$

$$A - B \text{ n'est pas définie.} \tag{10}$$

$$2A = 2\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 4 \\ 0 & 2 & -8 \\ -6 & 4 & -2 \end{pmatrix} \tag{11}$$

$$-3B = -3\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 \\ -6 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Exercice 2. *Soient* $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ *où* $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. *Trouver les valeurs de* x, y, z, w *tels que*

$$2A - C = B \tag{13}$$

Correction :

$$\begin{aligned} 2A - C = B \quad &\Leftrightarrow 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -20 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{14}$$

Ainsi, $x = -5$, $y = 3$, $z = -20$ et $w = 16$.

Exercice 3. *Trouver si possible* AB *et* BA.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Correction :

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 + 6 \cdot 1 & 2 \cdot (-2) + 6 \cdot 7 \\ 3 \cdot 5 - 4 \cdot 1 & 3 \cdot (-2) - 4 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 38 \\ 11 & -34 \end{pmatrix} \tag{15}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 2 - 2 \cdot 3 & 5 \cdot 6 - 2 \cdot (-4) \\ 1 \cdot 2 + 7 \cdot 3 & 1 \cdot 6 + 7 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 38 \\ 23 & -22 \end{pmatrix} \tag{16}$$

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Correction :

$$
\begin{aligned}
AB &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (3)\cdot(1)+(0)\cdot(4)+(-1)\cdot(0) & (3)\cdot(-5)+(0)\cdot(1)+(-1)\cdot(-1) & (3)\cdot(0)+(0)\cdot(-2)+(-1)\cdot(3) \\ (0)\cdot(1)+(4)\cdot(4)+(2)\cdot(0) & (0)\cdot(-5)+(4)\cdot(1)+(2)\cdot(-1) & (0)\cdot(0)+(4)\cdot(-2)+(2)\cdot(3) \\ (5)\cdot(1)+(-3)\cdot(4)+(1)\cdot(0) & (5)\cdot(-5)+(-3)\cdot(1)+(1)\cdot(-1) & (5)\cdot(0)+(-3)\cdot(-2)+(1)\cdot(3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3 & -14 & -3 \\ 16 & 2 & -2 \\ -7 & -29 & 9 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{17}
$$

$$
BA = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -20 & -11 \\ 2 & 10 & -4 \\ 15 & -13 & 1 \end{pmatrix} \tag{18}
$$

3. $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}.$

Correction :

$$
AB = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ -18 & +11 \end{pmatrix} \tag{19}
$$

$$
BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -5 & 2 & 2 \\ -51 & 26 & 10 \end{pmatrix} \tag{20}
$$

4. $A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}.$

Correction :

$$
AB = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \end{pmatrix} \tag{21}
$$

$$
BA = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \\ -12 & 28 & 8 \\ 15 & -35 & -10 \end{pmatrix} \tag{22}
$$

5. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$

Correction :

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$BA \text{ n'est pas définie.} \tag{24}$$

Exercice 4. *Montrer que* $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *est l'inverse de* $\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Correction : on a

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (5)\cdot(3)+(7)\cdot(-2) & (5)\cdot(-7)+(7)\cdot(5) \\ (2)\cdot(3)+(3)\cdot(-2) & (2)\cdot(-7)+(3)\cdot(5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{25}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3)\cdot(5)+(-7)\cdot(2) & (3)\cdot(7)+(-7)\cdot(3) \\ (-2)\cdot(5)+(5)\cdot(2) & (-2)\cdot(7)+(5)\cdot(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{26}$$

Exercice 5. *Inverser les matrices suivantes si possible.*

1. $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$.

3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Correction :

1. $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \left(\det \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right)^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

2. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible puisque $\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} = 2 \cdot 8 - 4 \cdot 4 = 0$.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ une matrice réelle telle que $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Cette relation nous donne les systèmes qui ont pour solution les colonnes de la matrice A :

$$\begin{cases} 3a_{11} & -a_{21} & & = & 1 \\ 2a_{11} & +2a_{21} & & = & 0 \\ & & 4a_{31} & = & 0 \end{cases} \tag{27}$$

$$\begin{cases} 3a_{12} & -a_{22} & & = & 0 \\ 2a_{12} & +2a_{22} & & = & 1 \\ & & 4a_{32} & = & 0 \end{cases} \tag{28}$$

$$\begin{cases} 3a_{13} & -a_{23} & & = & 0 \\ 2a_{13} & +2a_{23} & & = & 0 \\ & & 4a_{33} & = & 1 \end{cases} \tag{29}$$

On obtient alors $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/8 & 0 \\ -1/4 & 3/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$.

4. De la même manière qu'en 3, on obtient $\begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \\ -\frac{4}{3} & -\frac{8}{3} & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. *Résoudre les systèmes suivants :*

1. $\begin{cases} x & +2y & -3z & = & -1 \\ 3x & -y & +2z & = & 7 \\ 8x & +2y & -2z & = & 9 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x & +y & -2z & = & 10 \\ x & +y & +4z & = & -9 \\ 7x & +5y & +z & = & 14 \end{cases}$

Correction :

1. $\begin{cases} x & +2y & -3z & = & -1 \\ 3x & -y & +2z & = & 7 \\ 8x & +2y & -2z & = & 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +2y & -3z & = & -1 \\ & -7y & +11z & = & 10 \\ & -14y & +22z & = & 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & +2y & -3z & = & -1 \\ & -7y & +11z & = & 10 \\ & & 0 & = & -3 \end{cases}$

   Donc ce système est incompatible (il n'a pas de solution).

2. $\begin{cases} 2x & +y & -2z & = & 10 \\ x & +y & +4z & = & -9 \\ 7x & +5y & +z & = & 14 \end{cases}$

   a une solution unique : $(1, 2, -3)$.

Exercice 7. *Déterminer les valeurs de a pour lesquelles le système*

$$\begin{cases} 4x + ay & = 2 \\ ax + y & = 3 \end{cases} \tag{30}$$

1. a une solution unique

2. a une infinité de solutions

3. n'a pas de solution

Correction : Le système peut s'écrire

$$\begin{pmatrix} 4 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \tag{31}$$

On a $\det \begin{pmatrix} 4 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = 4 - a^2 = (2 - a)(2 + a) = 0 \Leftrightarrow a \in \{-2, 2\}$. Ainsi, le système a une solution unique si $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Si $a = -2$, alors

$$\begin{cases} 4x+2y &= 2 \\ 2x+y &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y &= 1 \\ 2x+y &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y &= 1 \\ 0 &= 1 \end{cases} \tag{32}$$

et le système n'a pas de solution dans ce cas. Si $a = -2$, alors

$$\begin{cases} 4x-2y &= 2 \\ -2x+y &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1y &= 1 \\ -2x+y &= 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1y &= 1 \\ 0 &= 4 \end{cases} \tag{33}$$

et le système n'a pas de solution dans ce cas. Il n'y a pas de valeur de a pour laquelle le système a une infinité de solutions.