



Matrices__
_CAFE_S_...

CAFE-S - Matrices

CAFE-S - Matrices

Axel CAULIER, Pedro GIESTEIRA, Charlène MICHELOT

Vendredi 15 septembre 2023

 **UNIVERSITÉ DE GENÈVE**
FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

CAFE-S - Matrices

Documents de CAFE-S : Lien Moodle

Scan Me



CAFE-S - Matrices

CAFE-S - Matrices

Sondage Wooclap

Sondage Wooclap



1 Allez sur wooclap.com

2 Entrez le code d'événement dans le bandeau supérieur

Code d'événement
ZXSXYJ

CAFE-S - Matrices

CAFE-S - Matrices

Définition et opérations sur les matrices

Sommaire

- 1 Définition et opérations sur les matrices
 - Définition d'une matrice
 - Matrices égales
 - Addition de matrices
 - Produit matriciel
 - Produit d'une matrice par un scalaire
 - Produit d'une matrice par une matrice colonne
 - Produit de deux matrices
 - Soustraction de deux matrices
 - Inversion de matrices
 - Matrice identité
 - Matrice inversible
 - Inverse de matrice 2×2 et déterminant
 - Exercices I
 - Correction I

CAFE-S - Matrices

Définition (Matrice)

Une **matrice** est un tableau rectangulaire de nombres qui est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Une matrice est dite de **taille** $m \times n$ si elle est constituée de m lignes et n colonnes.

Les nombres a_{ij} ($a_{ij} \in \mathbb{R}$) qui figurent dans une matrice sont appelés les **coefficients** de la matrice.

Terminologie

À la suite de ces exemples, nous allons introduire la terminologie suivante :

- Une matrice de taille $n \times n$ est une **matrice carrée** et de **taille** n .
- Une matrice de taille $1 \times n$ est une **matrice ligne**.
- Une matrice de taille $n \times 1$ est une **matrice colonne**.

Proposition

Deux matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ et $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq \ell}}$ sont égales si, et seulement si, A et B sont de **même taille**, c'est-à-dire $m = k$ et $n = \ell$ et si, pour tous i et j :

$$a_{ij} = b_{ij}$$

c'est-à-dire que les **coefficients à la même position sont égaux**.

Définition

Soient A et B deux matrices de taille $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

À condition que A et B soient de la **même taille**, nous définissons leur **addition** $A + B$ comme suit :

Définition (suite)

$A + B$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{m3} + b_{m3} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

CAFE-S - Matrices
 Définition et opérations sur les matrices
 Addition de matrices

Proposition
 L'addition de matrices est **commutative** : pour toutes matrices de même taille A et B , nous avons

$$A + B = B + A.$$

c'est-à-dire que le résultat ne change pas si nous échangeons les termes de places.

Proposition
 L'addition de matrices est **associative** : pour toutes matrices de même taille A , B et C , nous avons

$$A + (B + C) = (A + B) + C,$$

c'est-à-dire que nous avons le droit de regrouper des termes ensemble, sans changer le résultat.

Axel CAULIER, Pedro GIESTEIRA, Charlène MICHELOT CAFE-S - Matrices

CAFE-S - Matrices
 Définition et opérations sur les matrices
 Produit matriciel

Produit d'une matrice par un scalaire : Intuition

$$\begin{aligned} 2 \cdot A &= 2 \cdot (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \\ &= (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} + (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \\ &= (a_{ij} + a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \\ &= (2 \cdot a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \end{aligned}$$

Ce qui nous amène à :

Axel CAULIER, Pedro GIESTEIRA, Charlène MICHELOT CAFE-S - Matrices

CAFE-S - Matrices
 Définition et opérations sur les matrices
 Produit matriciel

Produit d'une matrice par un scalaire

Définition (Produit d'une matrice par un scalaire)
 Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit A une matrice de taille $m \times n$.
 Nous définissons le **produit de A par λ** comme suit :

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \lambda \cdot a_{13} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \lambda \cdot a_{23} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \lambda \cdot a_{m3} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Axel CAULIER, Pedro GIESTEIRA, Charlène MICHELOT CAFE-S - Matrices

CAFE-S - Matrices
 Définition et opérations sur les matrices
 Produit matriciel

Proposition
 Soient A et B deux matrices même taille et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- ① $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$, c'est la **distributivité du produit sur la somme des scalaires**.
- ② $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$, c'est la **distributivité du produit sur la somme des matrices**.
- ③ $(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$, c'est l'**associativité du produit d'une matrice par plusieurs scalaires**.
- ④ $\lambda \cdot A = A \cdot \lambda$, c'est la **commutativité du produit d'une matrice par un scalaire**.

Axel CAULIER, Pedro GIESTEIRA, Charlène MICHELOT CAFE-S - Matrices

CAFE-S - Matrices
 Définition et opérations sur les matrices
 Produit matriciel

Produit d'une matrice par une matrice colonne

Définition (Produit d'une matrice par une matrice colonne)
 Soient A et B deux matrices de tailles respectives $m \times n$ et $n \times 1$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}.$$

Nous définissons le **produit de A par B** , qui est une matrice colonne de taille $m \times 1$, comme suit :

Axel CAULIER, Pedro GIESTEIRA, Charlène MICHELOT CAFE-S - Matrices

Définition (suite)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + \dots + a_{2n} \cdot b_{n1} \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{11} + a_{m2} \cdot b_{21} + \dots + a_{mn} \cdot b_{n1} \end{pmatrix}$$

Exemple

Considérons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nous avons :

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 7 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 3 + (-2) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Produit de deux matrices

Définition (Produit de deux matrices)

Soient A et B deux matrices de tailles respectives $m \times n$ et $n \times p$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

Nous définissons le *produit* $A \cdot B$ des deux matrices A et B comme suit :

Définition (suite)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k} \cdot b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{1k} \cdot b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{1k} \cdot b_{kp} \\ \sum_{k=1}^n a_{2k} \cdot b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{2k} \cdot b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{2k} \cdot b_{kp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk} \cdot b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{mk} \cdot b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^n a_{mk} \cdot b_{kp} \end{pmatrix}$$

Remarque

Afin de pouvoir multiplier deux matrices A et B de tailles respectives $m \times n$ et $k \times l$, il faut que $n = k$. Dans ce cas, nous disons que A et B sont compatibles.

Remarque

En général, si A est de taille $m \times n$ et B est de taille $n \times p$, $A \cdot B$ sera une matrice de taille $m \times p$.

Astuce de calcul : En règle générale, dans $C := A \cdot B$, le coefficient c_{ij} s'obtient en multipliant la ligne i de A et la colonne j de B .

Exemple

Considérons

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

A est de taille 2×2 et B est de taille 2×3 , elles sont donc compatibles.
Nous avons :

Exemple (suite)

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \cdot 7 + (-2) \cdot 4 & 5 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) & 5 \cdot 2 + (-2) \cdot 6 \\ 1 \cdot 7 + 3 \cdot 4 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 27 & 2 & -2 \\ 19 & -3 & 20 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemple (suite)

En revanche, le produit $B \cdot A$ n'est pas possible, comme B possède 3 colonnes et A possède 2 lignes.

Question :

Est-ce que le produit de deux matrices est commutatif?

Exemple (suite)

Si B avait été une matrice carrée de taille 2, les deux produits auraient été possibles. Pour cela, considérons :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} A \cdot \tilde{B} &= \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \cdot 7 + (-2) \cdot 4 & 5 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) \\ 1 \cdot 7 + 3 \cdot 4 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 27 & 2 \\ 19 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemple (suite)

Tandis que :

$$\begin{aligned} \tilde{B} \cdot A &= \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 \cdot 5 + 0 \cdot 1 & 7 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 \\ 4 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 & 4 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 35 & -14 \\ 19 & -11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous remarquons que

$$A \cdot \tilde{B} \neq \tilde{B} \cdot A$$

Proposition

Soient A, B et C trois matrices carrées de même taille. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Le produit matriciel est associatif : $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.
- Le produit matriciel se distribue sur l'addition, à droite et à gauche :

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad \text{et} \quad (B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A.$$

- Nous avons :

$$\lambda \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\lambda \cdot B).$$

Définition (Soustraction de deux matrices)

Soient A et B deux matrices de même taille.

La soustraction $A - B$ est définie ainsi :

$$A - B = A + (-1) \cdot B.$$

Exemple

Prenons :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 0 & 41 & -1 \\ 7 & -11 & -3 \\ 4 & -21 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 8 \\ -20 & 7 & 19 \\ -2 & 6 & 13 \\ -11 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ces deux matrices sont de taille 4×3 . Nous pouvons donc les soustraire :

Exemple (suite)

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 0 & 41 & -1 \\ 7 & -11 & -3 \\ 4 & -21 & 6 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 12 & 8 \\ -20 & 7 & 19 \\ -2 & 6 & 13 \\ -11 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 + -1 & 2 + -12 & 1 + -8 \\ 0 + 20 & 41 + -7 & -1 + -19 \\ 7 + 2 & -11 + -6 & -3 + -13 \\ 4 + 11 & -21 + 0 & 6 + 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 & -10 & -7 \\ 20 & 34 & -20 \\ 9 & -17 & -16 \\ 15 & -21 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matrice identité

Définition (Matrice identité)

Nous appelons *matrice identité de taille n* la matrice carrée de taille n suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

analogie avec \mathbb{R} :
 $3 \cdot 1 = 3$

Matrice inversible

Définition (Matrice inversible)

Soit A une matrice carrée de taille n .

A est une *matrice inversible* s'il existe une matrice B carrée de taille n telle que

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

analogie avec \mathbb{R} .
 $3 \cdot \frac{1}{3} = 1$
 $\frac{1}{3} \cdot 3 = 1$

Nous appelons B la *matrice inverse* de A .

Inverse de matrice 2×2 et déterminant

Dans ce cours, nous nous limiterons au cas des matrices carrées de taille 2.

Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

A est *inversible* si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$, et son inverse est donné par

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Terminologie

Nous appelons $ad - bc$ le *déterminant* de la matrice A , que nous notons $\det(A)$.

Exercices I

Exercices

Exercice 1 : Considérons les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 17 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 17 & 2 \end{pmatrix} \quad C = (3 \ 9 \ 1)$$

Les matrices A et B sont-elles égales ? Calculer $A + B$, $-3B$, $A \cdot B$ et $A \cdot C$.

Exercice 2 : Calculer l'inverse de chacune des matrices suivantes :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Correction I - Exercice 1

Correction

Exercice 1 :

Considérons les matrices A et B ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 17 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 17 & 2 \end{pmatrix}$$

Bien que A et B soient de même taille (à savoir 2×2), elles ne sont pas égales car :

$$a_{11} = 6 \neq -6 = b_{11}.$$

Ceci signifie qu'il y a un coefficient qui n'est pas commun aux deux matrices.

Correction (Exercice 1 - Suite)

Effectuons les calculs demandés :

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 17 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 17 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 + (-6) & -5 + (-5) \\ 17 + 17 & 2 + 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 34 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notons qu'il a été possible d'additionner A et B car elles sont la même taille. A contrario, l'addition de A et C n'aurait pas été possible, étant donné que les deux matrices sont de tailles différentes.

Correction (Exercice 1 - Suite)

$$\begin{aligned} -3B &= (-3) \cdot \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 17 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-3) \cdot (-6) & (-3) \cdot (-5) \\ (-3) \cdot 17 & (-3) \cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 18 & 15 \\ -51 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Correction (Exercice 1 - Suite)

$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 17 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 17 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \cdot (-6) + (-5) \cdot 17 & 6 \cdot (-5) + (-5) \cdot 2 \\ 17 \cdot (-6) + 2 \cdot 17 & 17 \cdot (-5) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -121 & -40 \\ -68 & -81 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notons qu'il a été possible de multiplier A et B car celles-ci sont compatibles. A contrario, le produit de A et C n'est pas possible, étant donné que A est de taille 2×2 et C de taille 1×3 , ce qui les rend incompatibles.

Correction 1 - Exercice 2

Correction

Exercice 2 :

Dans cet exercice, nous souhaitons calculer l'inverse, s'il existe, de deux matrices carrées de taille 2. Pour cela, rappelons qu'une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est inversible si, et seulement si, $\det(A) = ad - bc \neq 0$, et son inverse est donné par

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Correction (Exercice 2 - Suite)

Considérons la matrice D :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$$

et commençons par calculer $\det(D)$. Si $\det(D) = 0$, l'inverse n'existe pas. Sinon, celui-ci existe et s'obtient facilement grâce au rappel.

$$\det(D) = 1 \cdot 3 - 4 \cdot (-1) = 7 \neq 0.$$

Ainsi, son inverse est donné par :

$$D \cdot D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{matrix} D^{-1} \cdot D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \text{par déf. de matrices} \\ \text{inversibles} \end{matrix}$$

Correction (Exercice 2 - Suite)

Considérons maintenant la matrice E :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

et, comme avant, calculons $\det(E)$. Si $\det(E) = 0$, l'inverse n'existe pas. Sinon, celui-ci existe et s'obtient facilement grâce au rappel.

$$\det(E) = 1 \cdot (-2) - (-1) \cdot 2 = 0.$$

Donc, E^{-1} n'existe pas !

CAFE-S - Matrices
 ↳ Systèmes linéaires

Sommaire (suite)

- Systèmes linéaires
 - Définition d'un système linéaire
 - Opérations autorisées sur les lignes d'un système linéaire
 - Systèmes linéaires carrés
 - Résolution d'un système linéaire carré par substitution
 - Système avec une infinité de solutions
 - Nombre de solutions d'un système carré
 - Résolution d'un système linéaire carré avec la matrice inverse
 - Systèmes linéaires rectangulaires
 - Exercices II
 - Correction II

Avet CAULIER, Pedro GIESTEIRA, Charlene MICHELOT CAFE-S - Matrices

$$\cdot \begin{cases} x^2 + 1 = 2y \\ y = x - 1 \end{cases} \leftarrow, \quad \mathcal{S} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\} \quad (1, 2) \neq (2, 1)$$

$$(1, 2) + (2, 3) = \dots$$

$$\cdot \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 0 \quad 2y = 1 \end{cases} \quad / \quad \begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x - 5y = 0 \end{cases}$$

CAFE-S - Matrices
 ↳ Systèmes linéaires
 ↳ Définition d'un système linéaire

Définition (Système linéaire)

Un système linéaire à m équations et n inconnues consiste en des équations de la forme :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1,n}x_n = b_1 & (L_1) \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n-1}x_{n-1} + a_{m,n}x_n = b_m & (L_m) \end{cases}$$

Avet CAULIER, Pedro GIESTEIRA, Charlene MICHELOT CAFE-S - Matrices

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

CAFE-S - Matrices
 ↳ Systèmes linéaires
 ↳ Définition d'un système linéaire

Terminologie

- Si $m = n$, c'est-à-dire s'il y a autant d'équations que d'inconnues le système est dit **carré**.
- Dans le cas contraire, si $m \neq n$, le système est dit **rectangulaire**.

Avet CAULIER, Pedro GIESTEIRA, Charlene MICHELOT CAFE-S - Matrices

CAFE-S - Matrices
 ↳ Systèmes linéaires
 ↳ Définition d'un système linéaire

Remarque

Étant donné un système linéaire à m équations et n inconnues

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1,n}x_n = b_1 & (L_1) \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n-1}x_{n-1} + a_{m,n}x_n = b_m & (L_m) \end{cases}$$

il nous est possible de le réécrire à l'aide de matrices.
 Nous allons introduire la matrice des coefficients, la matrice des inconnues et une troisième matrice :

Avet CAULIER, Pedro GIESTEIRA, Charlene MICHELOT CAFE-S - Matrices

$$x \mapsto Ax$$

$$\Leftrightarrow Ax = b$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\underline{f(x) = y}$$

~~u~~

CAFE-S - Matrices
 ↳ Systèmes linéaires
 ↳ Définition d'un système linéaire

Remarque (suite)

La **matrice des coefficients** sera la matrice A suivante, de taille $m \times n$ dans laquelle nous stockons tous les coefficients a_{ij} de notre système, suivant leur ordre d'apparition :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Axel CAULIER, Pedro GIESTEIRA, Charlène MICHELOT CAFE-S - Matrices

CAFE-S - Matrices
 ↳ Systèmes linéaires
 ↳ Définition d'un système linéaire

Remarque (suite)

La **matrice des inconnues** sera un vecteur colonne x , de taille $n \times 1$, dans laquelle se trouvent toutes les inconnues du système, suivant leur ordre d'indexation :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Axel CAULIER, Pedro GIESTEIRA, Charlène MICHELOT CAFE-S - Matrices

CAFE-S - Matrices
 ↳ Systèmes linéaires
 ↳ Définition d'un système linéaire

Remarque (suite)

Finalement, assez logiquement, la troisième matrice sera le vecteur colonne regroupant les b_1, \dots, b_m , que nous noterons B et qui sera de taille $m \times 1$:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Axel CAULIER, Pedro GIESTEIRA, Charlène MICHELOT CAFE-S - Matrices

CAFE-S - Matrices
 ↳ Systèmes linéaires
 ↳ Définition d'un système linéaire

Remarque (suite)

Ainsi, respectivement à ces trois nouvelles matrices que nous avons introduites, nous pouvons réécrire

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n-1}x_{n-1} + a_{1,n}x_n = b_1 & (L_1) \\ \vdots & \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n-1}x_{n-1} + a_{m,n}x_n = b_m & (L_m) \end{cases}$$

comme :

$$A \cdot x = B.$$

Remarque

Les matrices A et x sont bien compatibles pour la multiplication et leur produit est bien une matrice de taille $m \times 1$.

Axel CAULIER, Pedro GIESTEIRA, Charlène MICHELOT CAFE-S - Matrices

Ax = b

CAFE-S - Matrices
 ↳ Systèmes linéaires
 ↳ Opérations autorisées sur les lignes d'un système linéaire

Proposition

Trois opérations sur les lignes d'un système linéaire qui ne changent pas ses solutions :

- ➊ Additionner des lignes entre elles
- ➋ Multiplier une ligne par une constante non nulle
- ➌ Échanger des lignes entre elles

Axel CAULIER, Pedro GIESTEIRA, Charlène MICHELOT CAFE-S - Matrices

(1) $\begin{cases} 3x - 2y = 0 & (L_1) \\ 10x - 5y = 2 & (L_2) \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 15x - 10y = 0 & (L_1) \\ 10x - 5y = 2 & (L_2) \end{cases}$

(1) ↔ (3) $\begin{cases} 3x - 2y = 0 & (L_1) \\ 7x - 3y = 2 & (L_2) - (L_1) \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3y = 5 & (L_1) \\ x - 2y = 10 & (L_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 + y = -15 & L_1 - 2L_2 \\ x - 2y = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = 10 \\ y = -15 \end{cases}$$

$$(L_1) - 2(L_2) \Rightarrow "2x - 3y = 5" - 2"x - 2y = 10"$$

$$(7x - 3y = 2) - (L_1)$$

$$\Rightarrow 2x - 3y - 2x + 4y = 5 - 20 \Rightarrow \begin{cases} x = 7y + 10 \\ y = -15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -20 \\ y = -15 \end{cases}$$

À ce stade, il est naturel de nous demander si ces trois opérations permettent de simplifier un système, afin de le rendre plus facile à résoudre.

Exemple
Considérons le système ci-dessous :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 & (L_1) \\ 3x_1 + x_2 = 3 & (L_2) \end{cases}$$

Nous commençons par remarquer qu'il nous est possible d'éliminer la variable x_1 dans (L_2) en additionnant $-3 \cdot (L_1)$ à (L_2) . Ceci est utile car, une fois effectué, nous pourrions déduire la valeur de x_2 , à partir (L_2) , assez facilement. Dès lors, en isolant x_1 dans (L_1) et connaissant la valeur de x_2 , la valeur de x_1 est immédiatement obtenue.

Exemple (suite)
D'une part :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 & (L_1) \\ 3x_1 + x_2 = 3 & (L_2) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 & (L_1) \leftarrow (L_1) \\ 0x_1 + -2x_2 = -3 & (L_2) \leftarrow (L_2) + (-3) \cdot (L_1) \end{cases}$$

(L_2) nous donne immédiatement que $x_2 = \frac{3}{2}$.

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

Exemple (suite)
D'autre part :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 & (L_1) \\ 3x_1 + x_2 = 3 & (L_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - x_2 & (L_1) \\ x_2 = \frac{3}{2} & (L_2) \end{cases}$$

Ainsi : $x_1 = 2 - x_2 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$.

En conclusion, la solution du système est $x = (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Nous allons introduire une méthode de résolution de systèmes linéaires carrés (c'est-à-dire $m = n$) :

Algorithme (Résolution par substitution)

Étant donné un système linéaire carré, nous commençons par isoler x_1 dans (L_1) : x_1 s'écrit en fonction des x_2, \dots, x_n . Dans les lignes (L_2) jusqu'à (L_n) , nous remplaçons x_1 par son expression trouvée en (L_1) . Nous faisons de même avec x_2 : nous l'isolons dans (L_2) de sorte à obtenir une expression en fonction des x_3, \dots, x_n , et remplaçons x_2 par son expression dans les lignes suivantes. Nous itérons ce procédé jusqu'à la ligne (L_n) , dans laquelle il ne reste plus que x_n , ce qui nous permet d'en déduire la valeur directement. Ensuite, nous remplaçons x_n par sa valeur dans (L_{n-1}) , afin de trouver x_{n-1} . Nous réitérons cette même méthode afin de déterminer $x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_3, x_2, x_1$.

CAFE-S - Matrices
Systèmes linéaires
Systèmes linéaires carrés

Exemple
Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 & (L_1) \\ 3x_1 + x_2 = 3 & (L_2) \end{cases}$$

Nous pouvons changer la ligne (L₁) en additionnant -x₂, ce qui permet d'isoler x₁ :

$$\begin{cases} x_1 = 2 - x_2 & (L_1) \\ 3x_1 + x_2 = 3 & (L_2) \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant utiliser (L₁) et remplacer x₁ dans (L₂), afin d'obtenir une équation avec une seule inconnue dans (L₂).

Axel CAULIER, Pedro GIESTEIRA, Charlene MICHELOT CAFE-S - Matrices

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 & (L_1) \\ 3x_1 + x_2 = 3 & (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - x_2 \\ 3(2 - x_2) + x_2 = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - x_2 \\ 3(2 - x_2) + x_2 = 3 \end{cases}$$

CAFE-S - Matrices
Systèmes linéaires
Systèmes linéaires carrés

Exemple (suite)
Il nous reste donc à isoler x₂ dans (L₂) pour déterminer l'inconnue :

remplacer $\begin{cases} x_1 = 2 - x_2 & (L_1) \\ 3(2 - x_2) + x_2 = 3 & (L_2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - x_2 & (L_1) \\ 6 - 2x_2 = 3 & (L_2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 - x_2 & (L_1) \\ x_2 = \frac{3}{2} & (L_2) \end{cases}$$

Nous avons trouvé x₂ = 3/2. Par (L₁) : x₁ = 2 - x₂ = 1/2.

En conclusion, la solution du système est $x = (x_1, x_2) = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

nous retombons sur ce que nous avons déjà déterminé.

Axel CAULIER, Pedro GIESTEIRA, Charlene MICHELOT CAFE-S - Matrices

CAFE-S - Matrices
Systèmes linéaires
Systèmes linéaires carrés

Un système ayant une infinité de solutions

Exemple
Considérons le système :

$$(A) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 4x_1 + 9x_2 + 1x_3 = 2 \\ 6x_1 + 11x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 9 & 1 \\ 6 & 11 & 4 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En résolvant le système par la méthode de substitution, nous trouvons :

Axel CAULIER, Pedro GIESTEIRA, Charlene MICHELOT CAFE-S - Matrices

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 & (L_1) \\ 0 + 5x_2 - 5x_3 = 0 & (L_2) - 2(L_1) \\ 0 + 5x_2 - 5x_3 = 0 & (L_3) - 3(L_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 & (L_1) \\ 5x_2 - 5x_3 = 0 & (L_2) \\ 0 = 0 & (L_3) - (L_2) \end{cases}$$

$$x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$(L_2) \Leftrightarrow 5x_2 - 5\lambda = 0$$

$$\Leftrightarrow x_2 = \frac{5\lambda}{5} = \lambda$$

$$(L_1) \Leftrightarrow x_1 = \frac{1 - 5\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1-5\lambda}{2} \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\vec{OA} + \lambda \vec{AB}$$

CAFE-S - Matrices
Systèmes linéaires
Systèmes linéaires carrés

Exemple (suite)

Étape 1 $\begin{cases} x_1 = \frac{1-2x_2-3x_3}{2} \\ x_2 = x_3 \\ 3 + 5(x_3) - 5x_3 = 3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1-2x_2-3x_3}{2} \\ x_2 = x_3 \\ 3 = 3 \end{cases}$$

Nous observons qu'il n'y a aucune condition sur la variable x₃ (la ligne (L₃) est une tautologie*), donc nous pouvons prendre n'importe quel réel comme solution pour x₃, x₃ = λ ∈ ℝ.

a. Une tautologie est une affirmation toujours vraie, indépendamment de l'inconnue x = (x₁, x₂, x₃)

Axel CAULIER, Pedro GIESTEIRA, Charlene MICHELOT CAFE-S - Matrices

CAFE-S - Matrices
Systèmes linéaires
Systèmes linéaires carrés

Exemple (suite)
Il en découle, par (L₂), que x₂ = x₃ = λ et, par (L₁), que x₁ = 1/2 - 5/2 λ.

L'ensemble des solutions de notre système est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2}\lambda, \lambda, \lambda \right) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

Terminologie
λ comme dans l'ensemble des solutions ci-dessus est une **variable libre**.

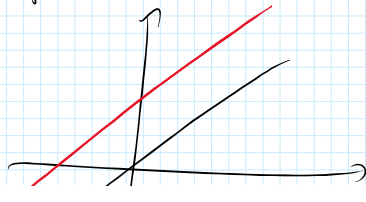
Axel CAULIER, Pedro GIESTEIRA, Charlene MICHELOT CAFE-S - Matrices

$$(L_1) \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 0 \\ 4x_1 + 10x_2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 = 0 & (L_1) \\ 0 + 0 = 10 & (L_2) - 2(L_1) \end{cases}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 10 \end{pmatrix} = 2 \cdot 10 - 4 \cdot 5 = 0$$

$$(L_1) \times 2 = \frac{2x_1}{2} = \frac{2}{5} x_2$$

$$\mathcal{S} = \emptyset$$



$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$$

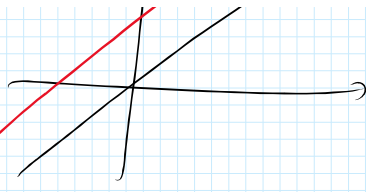
Proposition

Soit $A \cdot x = b$ un système linéaire carré, c'est-à-dire $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.
 • $A \cdot x = b$ a une unique solution $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
 • $A \cdot x = b$ a une infinité ou aucune solution $\Leftrightarrow \det(A) = 0$

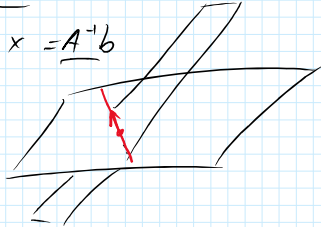
$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$



donc $A \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$
 $\Leftrightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b$
 $\Leftrightarrow x = A^{-1}b$



Remarque

Il existe une autre méthode pour trouver la solution de $Ax = b$. Lorsque A est inversible, c'est-à-dire lorsque $\det(A) \neq 0$, nous pouvons trouver la solution du système en utilisant la matrice inverse A^{-1}

$$Ax = b \Leftrightarrow \underbrace{A^{-1}A}_=I x = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b$$

$m < n \Rightarrow$ pas possible d'avoir une seule solution
 $m > n \Rightarrow$ tous les cas sont possibles

$$\begin{cases} 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Considérons maintenant des systèmes rectangulaires ($m \neq n$) :

Remarque

La méthode de résolution par substitution est valable pour les systèmes linéaires de m équations à n inconnues. La différence est que nous allons forcément faire apparaître ce que nous appelons des variables libres, comme vu dans l'exemple du système carré ayant une infinité de solutions; nous le verrons en exercices. En particulier, les systèmes linéaires rectangulaires admettent ou bien une infinité de solutions ou bien aucune solution.

$$\begin{cases} 2x + 4y + 5z = 0 \\ 7x + 2y + 12z = 0 \\ 5x = 0 \\ 3y = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 7 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercices II

Exercices

Exercice 1 : Résoudre les systèmes $Ax = b$ pour les A et b suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Résoudre le système suivant, à l'aide de la matrice inverse de A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Ax = b$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 3z = 0 \\ x + 3y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -3y \\ y = -\frac{2}{3}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y \\ z = -\frac{2}{3}y \end{cases}$$

$$y = \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3\lambda \\ z = -\frac{2}{3}\lambda \end{cases} \Rightarrow \mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\lambda \\ \lambda \\ -\frac{2}{3}\lambda \end{pmatrix}$$

Correction II - Exercice 1

Correction

Exercice 1 : Résolvons les systèmes $Ax = b$ pour les A et b suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

C'est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} 0x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

CAFE-S - Matrices
 ↳ Systèmes linéaires
 ↳ Correction II

Correction II - Exercice 1

Correction

Exercice 1 :
 Résolvons les systèmes $Ax = b$ pour les A et b suivants :

1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

C'est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} 0x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2 \end{cases}$$

Axel CAULIER, Pedro GIESTEIRA, Charlène MICHELOT CAFE-S - Matrices

CAFE-S - Matrices
 ↳ Systèmes linéaires
 ↳ Correction II

Correction (Exercice 1 - Suite)

1 Résolvons-le par substitution :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 0x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2 \end{cases}$$

Nous avons échangé les lignes 1 et 2. En isolant x_2 dans la deuxième ligne :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{3}{2}x_3 \\ 0x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 2 \end{cases}$$

En substituant x_2 dans la troisième ligne :

Axel CAULIER, Pedro GIESTEIRA, Charlène MICHELOT CAFE-S - Matrices

CAFE-S - Matrices
 ↳ Systèmes linéaires
 ↳ Correction II

Correction (Exercice 1 - Suite)

1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{3}{2}x_3 \\ 4\left(\frac{3}{2}x_3\right) + 6x_3 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{3}{2}x_3 \\ 0 = 2 \end{cases}$$

À la dernière ligne, nous trouvons $2 = 0$, ce qui est faux pour tout $x \in \mathbb{R}^3$. Donc ce système n'admet aucune solution.

Axel CAULIER, Pedro GIESTEIRA, Charlène MICHELOT CAFE-S - Matrices

CAFE-S - Matrices
 ↳ Systèmes linéaires
 ↳ Correction II

Correction (Exercice 1 - Suite)

1

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C'est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} 0x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \\ 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}$$

Résolvons-le par substitution :

Axel CAULIER, Pedro GIESTEIRA, Charlène MICHELOT CAFE-S - Matrices

CAFE-S - Matrices
 ↳ Systèmes linéaires
 ↳ Correction II

Correction (Exercice 1 - Suite)

1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Nous avons échangé les lignes 1 et 2. En isolant x_2 dans la deuxième ligne :

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{3}{2}x_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\frac{3}{2}x_3 \end{cases}$$

Axel CAULIER, Pedro GIESTEIRA, Charlène MICHELOT CAFE-S - Matrices

Correction (Exercice 1 - Suite)

La ligne 2 signifie que x_2 s'exprime en fonction de x_3 , et que nous n'avons aucune condition sur x_3 , ce qui fait que tout $x_3 \in \mathbb{R}$ est admissible. x_3 est ce que nous appelons un **paramètre libre**, et nous écrirons : $x_3 := \lambda$.
En l'occurrence, la liberté sur la valeur de x_3 nous procure une infinité de solutions à notre système. En effet, l'ensemble des solutions est :

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{3}{2}\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Correction II - Exercice 2

Correction

Exercice 2 :

Considérons le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puisque c'est un système carré, nous pouvons calculer le déterminant de la matrice A . En effet, cela est utile car, si $\det(A) \neq 0$, le système possède une unique solution $x = A^{-1}b$. Le cas contraire, notre système ne possède aucune ou une infinité de solutions (que nous pourrions déterminer en résolvant le système par substitution, par exemple).

Correction (Exercice 2 - Suite)

Nous avons :

$$\det(A) = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 9 = -19 \neq 0,$$

ce qui rend la matrice A inversible !

Notre système possède, en conséquence, l'unique solution

$$x = A^{-1}b.$$

Grâce au cours sur les matrices, nous sommes en mesure de statuer que

$$A^{-1} = \frac{1}{-19} \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction (Exercice 2 - Suite)

Ce qui nous conduit à :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{-19} \begin{pmatrix} -1 & -9 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} (-1) \cdot (-1) + (-9) \cdot 0 \\ (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{19} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sondage Woodlap



1 Allez sur [woodlap.com](https://www.woodlap.com)

2 Entrez le code d'événement dans le bandeau supérieur

Code d'événement **REXRMZ**

Questionnaire UNIGE

