Correction des exercices sur les fonctions élémentaires

15 septembre 2023

Exercice 1. *1. Composer les fonctions suivantes, lorsque cela est possible :*

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 5 \end{array} \qquad\qquad k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} - 8 \end{array}$$

2. Donner le domaine de définition de la fonction $((2g-3k)\cdot g)$ et calculer $((2g-3k)\cdot g)(1)$.

Correction : effectuée durant la séance.

Exercice 2. *Déterminer la parité des fonctions g et k de l'exercice 1.*

Correction : effectuée durant la séance.

Exercice 3. *Résoudre les équations suivantes :*

1. $4^x \cdot (1/2)^{3-2x} = 8 \cdot (2^x)^2$.
2. $9^{2x} \cdot (1/3)^{x+2} = 27 \cdot (3^x)^{-2}$.

Correction :

$$\begin{aligned} 4^x \cdot (1/2)^{3-2x} = 8\cdot(2^x)^2 \quad &\Leftrightarrow \quad (2^2)^x \cdot (2^{-1})^{3-2x} &&= 2^3 \cdot (2^x)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad 2^{2x}\cdot 2^{-3+2x} &&= 2^3 \cdot 2^{2x} \\ &\Leftrightarrow \quad 2^{-3+4x} &&= 2^{2x+3} \\ &\Leftrightarrow \quad -3+4x &&= 2x+3 \\ &\Leftrightarrow \quad 2x &&= 6 \\ &\Leftrightarrow \quad x &&= 3. \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} 9^{2x} \cdot (1/3)^{x+2} = 27\cdot(3^x)^{-2} \quad &\Leftrightarrow \quad (3^2)^{2x} \cdot (3^{-1})^{x+2} &&= 3^3 \cdot 3^{-2x} \\ &\Leftrightarrow \quad 3^{4x}\cdot 3^{-x-2} &&= 3^{3-2x} \\ &\Leftrightarrow \quad 3^{3x-2} &&= 3^{3-2x} \\ &\Leftrightarrow \quad 3x-2 &&= 3-2x \\ &\Leftrightarrow \quad 5x &&= 5 \\ &\Leftrightarrow \quad x &&= 1. \end{aligned} \tag{2}$$

Exercice 4. *Trouver une base $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ telle que $(2,5) \in \mathscr{C}_{a^x}$.*

Correction : $(2,5) \in \mathscr{C}_{a^x}, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \Leftrightarrow a^2 = 5, a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \Leftrightarrow a = \sqrt{5}$.

Exercice 5. *Mettre les équations suivantes sous forme logarithmiques :*

1. $10^x = y - 3$
2. $\exp(2t) = 3 - x$

Correction : par la définition du logarithme,

1. $10^x = y - 3 \Leftrightarrow x = \log_{10}(y-3)$,
2. $\exp(2t) = 3 - x \Leftrightarrow 2t = \ln(3-x)$.

Exercice 6. *Trouver si possible les nombres :* $\log_5(1)$, $\log_3(3)$ *et* $\log_5(125)$.

Correction : par les propriétés du logarithme,

1. $\log_5(1) = 0$,
2. $\log_3(3) = 1$,
3. $\log_5(125) = \log_5(5^3) = 3 \cdot \log_5(5) = 3 \cdot 1 = 3$.

Exercice 7. *Résoudre les équations suivantes :*

1. $3^{x+4} = 2^{1-3x}$.

2. $\log_6(x-5) - \log_6(2x+3) = 7$.

3. $5^x + 125(5^{-x}) = 30$

Correction : par les propriétés du logarithme,

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} 3^{x+4} = 2^{1-3x} \quad &\Leftrightarrow \quad \ln(3^{x+4}) &&= \ln(2^{1-3x}) \\ &\Leftrightarrow \quad (x+4)\ln(3) &&= (1-3x)\ln(2) \\ &\Leftrightarrow \quad \ln(3)\cdot x + 4\ln(3) &&= \ln(2) - 3\ln(2)\cdot x \\ &\Leftrightarrow \quad (\ln(3) + 3\ln(2))\cdot x &&= \ln(2) - 4\ln(3) \\ &\Leftrightarrow \quad x &&= \frac{\ln(2) - 4\ln(3)}{\ln(3) + 3\ln(2)} \end{aligned} \tag{3}$$

2. Supposons par l'absurde que l'équation $\log_6(x-5) - \log_6(2x+3) = 7$ a une solution $x \in \mathbb{R}$. Par la définition du logarithme, on aurait $x > 5$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \log_6(x-5) - \log_6(2x+3) = 7 \quad &\Leftrightarrow \quad \log_6\left(\frac{x-5}{2x+3}\right) &&= 7 \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{x-5}{2x+3} &&= 6^7 \\ &\Leftrightarrow \quad x-5 &&= 6^7(2x+3) \\ &\Leftrightarrow \quad x-5 &&= 2\cdot 6^7 \cdot x + 3 \cdot 6^7 \\ &\Leftrightarrow \quad (1 - 2\cdot 6^7)x &&= 3\cdot 6^7 + 5 \\ &\Leftrightarrow \quad x &&= \frac{3\cdot 6^7 + 5}{1 - 2\cdot 6^7}, \end{aligned} \tag{4}$$

mais $\dfrac{3\cdot 6^7 + 5}{1 - 2\cdot 6^7} = -1.500... < 0$, ce qui est absurde. Donc l'équation $\log_6(x-5) - \log_6(2x+3) = 7$ n'a pas de solution.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
5^x + 125(5^{-x}) = 30 \quad &\Leftrightarrow \quad 5^x 5^x + 125(5^{-x})5^x = 30 \cdot 5^x \\
&\Leftrightarrow \quad (5^x)^2 - 30 \cdot 5^x + 125 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad 5^x = \frac{-(-30) \pm \sqrt{(-30)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 125}}{2 \cdot 1} \\
&\Leftrightarrow \quad 5^x = 15 \pm 10 \\
&\Leftrightarrow \quad 5^x \in \{5, 25\} \\
&\Leftrightarrow \quad x \in \{\log_5(5), 2\log_5(5)\}
\end{aligned} \tag{5}$$

Exercice 8. *Résoudre les équations suivantes :*

1. $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$
2. $2^x - 16 \cdot 2^{3x-8} = 0$
3. $3^{5x-4} = 27^{4x^2}$
4. $\log_6(x-5) - \log_6(2x+3) = 7$
5. $6^{x-2} = 52$
6. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{7}\right) = 0$
7. $\sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$

Correction :

1. En $x = 1$, nous remarquons que $x^3 + 2x^2 - x - 2 = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 - 2 = 0$. Par conséquent, comme nous l'avons vu en cours :

$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = (x-1)Q(x), \quad \deg Q = 2.$$

Il reste à déterminer Q par division euclidienne de polynômes ; ce sera :

$$Q(x) = x^2 + 3x + 2.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}
x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 &\iff x - 1 = 0 \text{ ou } x^2 + 3x + 2 = 0 \\
&\iff x = 1 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = -2
\end{aligned}$$

En effet, pour le polynôme $x^2 + 3x + 2$, $\Delta = 9 - 8 = 1$, ce qui fait que $x_{1,2} = \frac{-3 \pm 1}{2}$.

2.

$$\begin{aligned}
2^x - 16 \cdot 2^{3x-8} = 0 &\iff 2^x - 2^4 \cdot 2^{3x-8} = 0 \\
&\iff 2^x - \cdot 2^{3x-4} = 0 \\
&\iff 2^x = 2^{3x-4} \\
&\iff x = 3x - 4 \\
&\iff -2x = -4 \\
&\iff x = 2
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} 3^{5x-4} = 27^{4x^2} &\iff 3^{5x-4} = (3^3)^{4x^2} \\ &\iff 3^{5x-4} = 3^{12x^2} \\ &\iff 5x - 4 = 12x^2 \\ &\iff -12x^2 + 5x - 4 = 0 \end{aligned}$$

Cette équation ne possède aucune solution réelle, puisque $\Delta = 25 - 192 < 0$.

4. Voir exercice 7.2

5.

$$\begin{aligned} 6^{x-2} = 52 &\iff x - 2 = \log_6(52) \\ &\iff x = \log_6(52) + 2 \end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned} \cos\left(2x - \frac{\pi}{7}\right) = 0 &\iff \cos\left(2x - \frac{\pi}{7}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &\iff 2x - \frac{\pi}{7} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } 2x - \frac{\pi}{7} = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\iff 2x = \frac{9\pi}{14} + 2k\pi \text{ ou } 2x = -\frac{5\pi}{14} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = \frac{9\pi}{28} + k\pi \text{ ou } x = -\frac{5\pi}{28} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\implies \mathrm{S} = \left\{ \frac{9\pi}{28} + k\pi,\ -\frac{5\pi}{28} + k\pi \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned} \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} &\iff \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\ &\iff 5x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 5x + \frac{\pi}{3} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\iff 5x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } 5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ &\iff x = -\frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5} \text{ ou } x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbb{Z} \\ &\implies \mathrm{S} = \left\{ -\frac{\pi}{30} + \frac{2k\pi}{5},\ \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\} \end{aligned}$$