Exercice 1. Comme nous l'avons fait pour $\frac{0}{0}$, expliquer en quoi $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$ sont des opérations non-définies.

Correction 1.

1. Pour $\frac{\infty}{\infty}$:
   $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty,$
   $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = +\infty,$
   $\lim_{x\to+\infty} \frac{ax}{x} = \lim_{x\to+\infty} a = a$
2. Pour $0\cdot\infty$:
   $\lim_{x\to+\infty} x^2\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty,$
   $\lim_{x\to+\infty} x\cdot\frac{1}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = +\infty,$
   $\lim_{x\to+\infty} ax\cdot\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} a = a$
3. Pour $\infty-\infty$: $\lim_{x\to+\infty} x-x = 0$
   $\lim_{x\to+\infty} x^2-x = \lim_{x\to+\infty} x(x-1) = +\infty\cdot+\infty = +\infty$

Rappel (Conjugué)**.** Le *conjugué* de, par exemple, $3+\sqrt{7}$ est $3-\sqrt{7}$. Une question légitime est "POURQUOI ?".
La réponse est simple : multiplier $3+\sqrt{7}$ et $3-\sqrt{7}$ permet d' "enlever" la racine de 7 :

$$\left(3+\sqrt{7}\right)\left(3-\sqrt{7}\right) = 9-7 = 2.$$

Plus formellement, le ***conjugué*** d'une expression de la forme $\alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b}$ est une expression de la forme $\alpha\sqrt{a}-\beta\sqrt{b}$. L'intérêt étant, comme dans l'exemple, le suivant :

$$\left(\alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b}\right)\left(\alpha\sqrt{a}-\beta\sqrt{b}\right) = \alpha^2 a-\beta^2 b$$

Magie magie ! Les racines carrées ont disparu ! En fait, ce n'est pas de la magie, c'est la troisième identité remarquable : $(x-y)(x+y) = x^2-y^2$!
En conclusion, multiplier une expression de la forme $\alpha\sqrt{a}+\beta\sqrt{b}$ par son conjugué fait disparaître les racines carrées !

Exercice 2. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to-3} \frac{x+3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{3}}$
2. $\lim_{x\to2} \frac{x-2}{x^3-8}$
3. $\lim_{x\to16} \frac{x-16}{\sqrt{x}-4}$
4. $\lim_{h\to0} \frac{4-\sqrt{16+h}}{h}$
5. $\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^4-9x+1}{3x^3-5x^2+8}$
6. $\lim_{h\to0} \left(\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+h}}-1\right)$
7. $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-\pi x+6}{3x^2-\ln(e)x^2+1}$
8. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-9}{(x-3)(x+3)(x+7)}$
9. $\lim_{x\to-\infty} 4x^3+5x^{10}-3$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

Correction 2. 1. En évaluant $\dfrac{x+3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{3}}$ en $x=-3$, nous obtenons la forme $\dfrac{0}{0}$. *A priori*, il ne s'agit pas d'une forme polynomiale. Mais, il faut se méfier des apparences ! En effet, en multipliant le numérateur et le dénominateur par x, nous obtenons :

$$\frac{x^2+3x}{1+\frac{1}{3}x}$$

Il s'agit donc d'une forme $\dfrac{0}{0}$ polynomiale ! Ainsi, nous avons besoin de factoriser le numérateur et le dénominateur par $(x+3)$, simplifier et trouver la limite ! Allons-y :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-3}\frac{x^2+3x}{1+\frac{1}{3}x} &= \lim_{x\to-3}\frac{x(x+3)}{\frac{1}{3}(x+3)}\\ &= \lim_{x\to-3}\frac{x}{\frac{1}{3}}\\ &= -9\end{aligned}$$

2. En évaluant $\dfrac{x-2}{x^3-8}$ en $x=2$, nous obtenons la forme $\dfrac{0}{0}$ polynomiale ! Nous procéderons comme au point précédent :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to2}\frac{x-2}{x^3-8} &= \lim_{x\to2}\frac{x-2}{(x-2)(x^2+2x-4))}\\ &= \lim_{x\to2}\frac{1}{x^2+2x+4}\\ &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

3. En remplaçant x par 16 dans l'expression $\dfrac{x-16}{\sqrt{x}-4}$, nous obtenons une forme $\dfrac{0}{0}$ racine carrée. Nous commencerons ainsi par multiplier la fraction par le conjugué de $-\sqrt{x}-4$ - à savoir $\sqrt{x}+4$ - simplifier et évaluer la limite ! C'est parti :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to16}\frac{x-16}{\sqrt{x}-4} &= \lim_{x\to16}\frac{x-16}{\sqrt{x}-4}\cdot\frac{-\sqrt{x}-4}{-\sqrt{x}-4}\\ &= \lim_{x\to16}\frac{x-16}{\sqrt{x}-4}\cdot\frac{\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}+4}\\ &= \lim_{x\to16}\frac{(x-16)\left(\sqrt{x}+4\right)}{\left(\sqrt{x}-4\right)\left(\sqrt{x}+4\right)}\\ &= \lim_{x\to16}\frac{(x-16)\left(\sqrt{x}+4\right)}{x-16}\\ &= \lim_{x\to16}\sqrt{x}+4\\ &= 8\end{aligned}$$

4. Pour les mêmes raisons qu'au point précédent, nous aboutissons sur une forme $\dfrac{0}{0}$ racine

carrée. Attachez vos ceintures :

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{4-\sqrt{16+h}}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{4-\sqrt{16+h}}{h} \cdot \frac{4+\sqrt{16+h}}{4+\sqrt{16+h}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(4-\sqrt{16+h}\right)\left(4+\sqrt{16+h}\right)}{h\left(4+\sqrt{16+h}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{16-(16+h)}{h\left(4+\sqrt{16+h}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h\left(4+\sqrt{16+h}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{4+\sqrt{16+h}} \\
&= -\frac{1}{8}
\end{aligned}$$

5. Nous savons que $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x^4-9x+1=+\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} 3x^3-5x^2+8=+\infty$. Autrement dit, nous avons une limite en l'infini de la forme $\dfrac{\infty}{\infty}$. À nous la mise en évidence forcée !

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty} \frac{5x^4-9x+1}{3x^3-5x^2+8} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3\left(5x-\dfrac{9}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x^3\left(3-\dfrac{5}{x}+\dfrac{8}{x^3}\right)} \\
&= \lim_{x\to+\infty} \frac{5x-\dfrac{9}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{3-\dfrac{5}{x}+\dfrac{8}{x^3}} \\
&= \frac{+\infty}{3} \\
&= +\infty
\end{aligned}$$

6. En $h=0$, $\left(\dfrac{1}{h}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+h}}-1\right)$ est de la forme $0\cdot\infty$. À ce stade, aucune méthode du cours ne semble être en mesure de nous aider... Mais, aucun souci, nous sommes en Maths, manipuler algébriquement est notre affaire ! Commençons donc par réécrire joliment (question de goût...) l'expression :

$$\left(\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+h}}-1\right) = \frac{1}{h}\cdot\frac{1-\sqrt{1+h}}{\sqrt{1+h}} = \frac{1-\sqrt{1+h}}{h\sqrt{1+h}}$$

Aha ! Il s'agit d'une forme $\dfrac{0}{0}$ racine carrée ! Le conjugué de $1-\sqrt{1+h}$ sera notre meilleur ami :

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to0}\frac{1-\sqrt{1+h}}{h\sqrt{1+h}} &= \lim_{h\to0}\frac{1-\sqrt{1+h}}{h\sqrt{1+h}}\cdot\frac{1+\sqrt{1+h}}{1+\sqrt{1+h}}\\
&= \lim_{h\to0}\frac{\left(1-\sqrt{1+h}\right)\left(1+\sqrt{1+h}\right)}{h\sqrt{1+h}\left(1+\sqrt{1+h}\right)}\\
&= \lim_{h\to0}\frac{1-(h+1)}{h\sqrt{1+h}+h(h+1)}\\
&= \lim_{h\to0}\frac{-h}{h\left(\sqrt{1+h}+h+1\right)}\\
&= \lim_{h\to0}\frac{-1}{\sqrt{1+h}+h+1}\\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

7. En $-\infty$, $\dfrac{x^2-\pi x+6}{3x^2-\ln(e)x^2+1}$ est de la forme $\dfrac{\infty}{\infty}$. Que faisons-nous dans ce cas ? Je vous le donne dans le mille : mise en évidence forcée ! Avant de le faire, nous allons simplement rappeler que $\ln(e)=1$, ce qui fait que $3x^2-\ln(e)x^2=2x^2$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-\pi x+6}{2x^2+1} &= \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{\pi}{x}+\frac{6}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}\\
&= \lim_{x\to-\infty}\frac{1-\frac{\pi}{x}+\frac{6}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}\\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

8. En $+\infty$, $\dfrac{x^2-9}{(x-3)(x+3)(x+7)}$ est de type $\dfrac{\infty}{\infty}$. Ici, notre clé sera la subtilité ! En effet, observons que $(x-3)(x+3)=x^2-9$! Il en découle que nous pouvons simplifier par x^2-9 au numérateur et au dénominateur. En conséquence :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-9}{(x^2-9)(x+7)} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x+7)}\\
&= 0
\end{aligned}$$

9. Quand x tend vers $-\infty$, $4x^3+5x^{10}-3$ est de la forme $\infty-\infty$. Comme avant, nous procéderons par une mise en évidence forcée :

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to-\infty}4x^3+5x^{10}-3 &= \lim_{x\to-\infty}x^{10}\left(5+\frac{4}{x^7}-\frac{3}{x^10}\right)\\
&= +\infty
\end{aligned}$$

10. Celle-ci est dégueulasse...je pense que vous en conviendrez. Bref, je vais essayer de rendre la factorisation la plus claire possible.
En effet, vous avez dû noter que, en $+\infty$, nous obtenions une limite de type $\dfrac{\infty}{\infty}$. Donc,

factoriser sera notre objectif !
Premièrement, nous pouvons rappeler que $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$. Ceci nous permet de réécrire :

$$\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}} = \frac{\left(x+\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{(x+1)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{x+\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Vu que nous considérons une limite en l'infini, la factorisation va rimer avec la mise en évidence forcée. Avec toutes ces puissances "pas trop cool", comment faire ? Nous allons commencer par factoriser chaque expression par x :

$$\left(\frac{x+\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{x\left(1+\frac{\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1+\frac{\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Afin d'achever notre dur labeur de factorisation, il faudrait réécrire $\frac{\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x}$ proprement, ce qui revient à factoriser le numérateur par x^2, étant donné que :

$$\frac{\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x} = \left(\frac{x+x^{\frac{1}{2}}}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

En conclusion :

$$\left(\frac{x+x^{\frac{1}{2}}}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{x^2\left(\frac{1}{x}+x^{-\frac{3}{2}}\right)}{x^2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{x}+x^{-\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Finalement :

$$\left(\frac{1+\frac{\left(x+x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1+\left(\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Nous pouvons maintenant évaluer la limite en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1+\left(\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}}{1+\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$