CAFE_S_Primitives (1)

jeudi, 14 septembre 2023 12:04

CAFE_S_Primitives (1)

Calcul différentiel 2: Primitives

Programme CAFE-S

Université de Genève

Septembre 2023

Lien vers OMB+

Premières notions

Nous mettons directement la notion de primitive avec celle de dérivée, sans motiver ici leur lien.

Définition

Une fonction F est dite *primitive* d'une fonction f sur un intervalle I, si et seulement si $F'(x) = f(x), \forall x \in I$. On écrit $\int f(x)dx = F(x)$

Exemples

Soit $f(x) = 3x^2$. Alors

- $F(x) = x^3$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, car $(x^3)' = 3x^2$.

Premières notions

Nous mettons directement la notion de primitive avec celle de dérivée, sans motiver ici leur lien.

Définition

Une fonction F est dite *primitive* d'une fonction f sur un intervalle I, si et seulement si $F'(x) = f(x), \forall x \in I$. On écrit $\int f(x)dx = F(x)$

Exemples

Soit $f(x) = 3x^2$. Alors

- $F(x) = x^3$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, car $(x^3)' = 3x^2$.
- $F(x) = x^3 + 1$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, car $(x^3 + 1)' = 3x^2$.

Relation entre toutes les primitives

Théorème

Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, et soient F et G deux primitives de f. Alors on a $F(x) = G(x) + c, \forall x \in I$, où c est une constante.

Relation entre toutes les primitives

Théorème

Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, et soient F et G deux primitives de f. Alors on a $F(x) = G(x) + c, \forall x \in I$, où c est une constante.

Donc si $F(x) = x^3$ est une primitive de f, $G(x) = x^3 + c$ est la famille de toutes les primitives de f.

Primitives élémentaires

1. c est une primitive de 0.

Primitives élémentaires

1. c est une primitive de 0.
2. x est une primitive de 1.

Primitives élémentaires

1. c est une primitive de 0.
2. x est une primitive de 1.
3. $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de x^n.

Primitives élémentaires

1. c est une primitive de 0.
2. x est une primitive de 1.
3. $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de x^n.
4. $\sqrt{x}$ est une primitive de $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Primitives élémentaires

1. c est une primitive de 0.
2. x est une primitive de 1.
3. $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de x^n.
4. $\sqrt{x}$ est une primitive de $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
5. $\frac{1}{x}$ est une primitive de $-\frac{1}{x^2}$. $= -x^{-2} \leadsto -\frac{x^{-2+1}}{-2+1} = -\frac{x^{-1}}{-1} = x^{-1} = \frac{1}{x}$

Primitives élémentaires

1. c est une primitive de 0.
2. x est une primitive de 1.
3. $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de x^n.
4. $\sqrt{x}$ est une primitive de $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
5. $\frac{1}{x}$ est une primitive de $-\frac{1}{x^2}$.
6. $-\cos(x)$ est une primitive de $\sin$.

Primitives élémentaires

1. c est une primitive de 0.
2. x est une primitive de 1.
3. $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de x^n.
4. $\sqrt{x}$ est une primitive de $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
5. $\frac{1}{x}$ est une primitive de $-\frac{1}{x^2}$.
6. $-\cos(x)$ est une primitive de $\sin$.
7. $\sin(x)$ est une primitive de $\cos(x)$.

Primitives élémentaires

1. c est une primitive de 0.
2. x est une primitive de 1.
3. $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de x^n.
4. $\sqrt{x}$ est une primitive de $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
5. $\frac{1}{x}$ est une primitive de $-\frac{1}{x^2}$.
6. $-\cos(x)$ est une primitive de $\sin$.
7. $\sin(x)$ est une primitive de $\cos(x)$.
8. $\tan(x)$ est une primitive de $1+\tan^2(x)$.

Propriétés des primitives

Soient $f : [a;b] \mapsto \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions qui admettent des primitives sur $[a;b]$. Alors

1. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, $\forall k \in \mathbb{R}$
   Ex: $\int 3x^2dx = 3\int x^2dx = 3\frac{x^3}{3} = x^3$.

Propriétés des primitives

Soient $f : [a;b] \mapsto \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions qui admettent des primitives sur $[a;b]$. Alors

1. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, $\forall k \in \mathbb{R}$
   Ex: $\int 3x^2dx = 3\int x^2dx = 3\frac{x^3}{3} = x^3$.
2. $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
   Ex: $\int (x^2+4x)dx = \int x^2dx + \int 4xdx = \frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{3} + 2x^2$.

Introduction Méthodes pour le calcul de primitive Interprétation géométrique Exercices Questionnaires

Propriétés des primitives

Soient $f : [a;b] \mapsto \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions qui admettent des primitives sur $[a;b]$. Alors

1. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, $\forall k \in \mathbb{R}$
   Ex: $\int 3x^2dx = 3\int x^2dx = 3\frac{x^3}{3} = x^3$.
2. $\int (f(x)+g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
   Ex: $\int (x^2+4x)dx = \int x^2dx + \int 4xdx = \frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{3} + 2x^2$.
3. $\int (f(x)-g(x))dx = \int f(x)dx - \int g(x)dx$
   Ex: $\int (\frac{x}{2} - e^x)dx = \int \frac{x}{2}dx - \int e^xdx = \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} - e^x = \frac{x^2}{4} - e^x$.

$(e^x)' = e^x \cdot (x') = e^x \cdot 1$

$(e^{x^2})' = 2xe^{x^2}$

$(\exp(x^2))' = \exp(x^2)\,2x = e^{x^2} \cdot 2x$

Introduction Méthodes pour le calcul de primitive Interprétation géométrique Exercices Questionnaires

Propriétés des primitives

4. $\int (g'(f(x))f'(x)dx = g(f(x))$, puisque
   $(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x) \rightarrow$ Règle de la chaîne.

Introduction Méthodes pour le calcul de primitive Interprétation géométrique Exercices Questionnaires

Propriétés des primitives

4. $\int (g'(f(x))f'(x)dx = g(f(x))$, puisque
   $(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x) \rightarrow$ Règle de la chaîne.
   Ex:
   - $\int (x^2-3)^4 2xdx = \frac{(x^2-3)^5}{5}$ $\rightsquigarrow$ $\left(\frac{(x^2-3)^5}{5}\right)' = \frac{1}{5}\left((x^2-3)^5\right)' = \frac{1}{\cancel{5}}\cancel{5}(x^2-3)^4 \cdot 2x$

     $= (x^2-3)^4 \cdot 2x$

Propriétés des primitives

4. $\int (g'(f(x))f'(x)dx = g(f(x))$, puisque $(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x) \rightarrow$ Règle de la chaîne.
   Ex:
   - $\int (x^2-3)^4 2x dx = \frac{(x^2-3)^5}{5}$
   - $\int (x^2-3)^4 x dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2-3)^5}{5} = \frac{(x^2-3)^5}{10}$

$\left(\frac{1}{2}\frac{(x^2-3)^5}{5}\right)' = \frac{1}{2}\frac{1}{\cancel{5}}\cancel{5}(x^2-3)^4\cdot 2x$

$= \frac{1}{2}(x^2-3)^4\cdot \cancel{2}x \overset{!}{=} (x^2-3)^4\cdot x$ ✓

Propriétés des primitives

4. $\int (g'(f(x))f'(x)dx = g(f(x))$, puisque $(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x) \rightarrow$ Règle de la chaîne.
   Ex:
   - $\int (x^2-3)^4 2x dx = \frac{(x^2-3)^5}{5}$
   - $\int (x^2-3)^4 x dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2-3)^5}{5} = \frac{(x^2-3)^5}{10}$
   - $\int \cos(x^5)7x^4 dx = \frac{7}{5}\sin(x^5)$

$\left(\frac{7}{5}\sin(x^5)\right)' = \frac{1\cdot 7}{\cancel{5}}\cos(x^5)\cdot \cancel{5}x^4 \overset{!}{=} \cos(x^5)7x^4$ ✓

$= \frac{7}{\cancel{5}}\cdot\cos(x^5)\cdot\cancel{5}x^4 = \cos(x^5)7x^4$

Propriétés des primitives

4. $\int (g'(f(x))f'(x)dx = g(f(x))$, puisque $(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x) \rightarrow$ Règle de la chaîne.
   Ex:
   - $\int (x^2-3)^4 2x dx = \frac{(x^2-3)^5}{5}$
   - $\int (x^2-3)^4 x dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2-3)^5}{5} = \frac{(x^2-3)^5}{10}$
   - $\int \cos(x^5)7x^4 dx = \frac{7}{5}\sin(x^5)$
   - $\int \cos(\sin(x^5))\cos(x^5)x^4 dx = \frac{\sin(\sin(x^5))}{5}$

$\rightsquigarrow \left(\frac{\sin(\sin(x^5))}{5}\right)' = \frac{1}{\cancel{5}}\cos(\sin(x^5))\cdot\cos(x^5)\cdot\cancel{5}x^4$

$\overset{!}{=} \cos(\sin(x^5))\cdot\cos(x^5)\cdot x^4$ ✓

Exercice

Exercice : Trouver les primitives suivantes.

1. $\int (x^4 - \cos(x))dx = \frac{x^5}{5} - \sin(x) + C$
2. $\int \pi e^x dx$
3. $\int \left(\sum_{k=0}^{5} x^k\right) dx$

$\int (x^0 + x^1 + \dots + x^5) dx$

2) $\int \pi e^x dx = \underset{\in \mathbb{R}}{\pi} \int e^x dx = \pi e^x + C$

3) $\int (x^0 + x + \dots + x^5) dx = \frac{x^1}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots + \frac{x^6}{6} + C$

$= \sum_{k=1}^{6} \frac{x^k}{k} + C$

1. Introduction
2. Méthodes pour le calcul de primitive
3. Interprétation géométrique
4. Exercices
5. Questionnaires

Méthodes pour déterminer une primitive

4. S'agit-il d'une primitive élémentaire?
   Exemple: $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \sqrt{x}$.

Méthodes pour déterminer une primitive

4. S'agit-il d'une primitive élémentaire?
   Exemple: $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \sqrt{x}$.
5. Peut-on utiliser les propriétés des primitives?
   Exemples:
   - $\int(3x^2-2)dx = \int 3x^2dx - \int 2dx = 3\int x^2dx - 2\int 1dx = 3\frac{x^3}{3} - 2x = x^3 - 2x$
   - $\int -\cos(\cos(x))\sin(x)dx = \int \cos(\cos(x))(-\sin(x))dx = \int \cos(\cos(x))\cos'(x)dx = \sin(\cos(x))$

Méthodes pour déterminer une primitive

4. S'agit-il d'une primitive élémentaire?
   Exemple: $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}dx = \sqrt{x}$.
5. Peut-on utiliser les propriétés des primitives?
   Exemples:
   - $\int(3x^2-2)dx = \int 3x^2dx - \int 2dx = 3\int x^2dx - 2\int 1dx = 3\frac{x^3}{3} - 2x = x^3 - 2x$
   - $\int -\cos(\cos(x))\sin(x)dx = \int \cos(\cos(x))(-\sin(x))dx = \int \cos(\cos(x))\cos'(x)dx = \sin(\cos(x))$
6. Peut-on récrire $f(x)$ pour simplifier le calcul?
   Exemple: $\int \frac{x^3+2}{x^2}dx = \int(\frac{x^3}{x^2} + \frac{2}{x^2})dx = \int(x + \frac{2}{x^2})dx = \int xdx + 2\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{x^2}{2} + 2(-\frac{1}{x}) = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{x}$.

Méthodes pour déterminer une primitive: Par parties

7. Lorsque nous avons affaire à une primitive qui contient un produit de deux fonctions et que les méthodes précédentes ne fonctionnent pas, nous pouvons utiliser le théorème suivant:

Théorème

Soit f et g deux fonctions dérivables sur $[a;b]$, telles que f' et g' soient continues sur $[a;b]$. Alors

$$\int \underbrace{f'(x)}_{\sin(x)}\underbrace{g(x)}_{x}dx = \underbrace{f(x)}_{-\cos(x)}\underbrace{g(x)}_{x} - \int \underbrace{f(x)}_{-\cos(x)}\underbrace{g'(x)}_{1}dx(+C)$$

Méthodes pour déterminer une primitive: Par parties

Exemples

Calculons $\int x\sin(x)dx$. On choisit de poser $f'(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$, et l'on obtient $f(x) = -\cos(x)$ et $g'(x) = 1$, d'où

$$\int x\sin(x)dx = -\cos(x)x - \int 1(-\cos(x))dx$$
$$= -x\cos(x) + \int \cos(x)dx = -x\cos(x) + \sin(x)$$

On vérifie bien que $(-x\cos(x) + \sin(x))' = x\sin(x)$.

Méthodes pour déterminer une primitive: Par parties

Remarque

- La difficulté consiste à faire le bon choix pour décider qui joue le rôle de $f'(x)$ et de $g(x)$ dans le produit, le but étant d'aboutir à un calcul de primitive plus simple.
- Il est parfois nécessaire de procéder à plusieurs intégrations par parties successives.

Par parties : exercices

- **Exercice 1** : Tenter la méthode par parties pour trouver une primitive de $x\sin(x)$, en posant cette fois-ci $g(x) = \sin(x)$ et $f'(x) = x$. Ce choix est-il plus optimal que celui de l'exemple précédent ?
- **Exercice 2** : Déterminer, en utilisant la méthode par parties, les primitives de la fonction xe^{3x}.

Rappel : La méthode par parties consiste à trouver une primitive d'un produit de deux fonctions. On choisit un facteur comme étant $g(x)$ et l'autre comme $f'(x)$. Puis appliquer la formule

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Le choix de $f'(x)$ et $g(x)$ est crucial, car le but est de simplifier le calcul, en choisissant de sorte que $\int f(x)g'(x)dx$ soit simple.

$f'(x) = x \leadsto f(x) = \frac{x^2}{2}$
$g(x) = \sin(x) \leadsto g'(x) = \cos(x)$

$\Downarrow$

$\int x\sin(x)dx = \frac{x^2}{2}\cdot\sin(x) - \int \frac{x^2}{2}\cdot\cos(x)d$
$= \frac{x^2}{2}\cdot\sin(x) - \frac{1}{2}\int x^2\cos(x)dx$

ex2: $\int xe^{3x}dx$ $\quad f'(x) = e^{3x} \leadsto f(x) = \frac{e^{3x}}{3}$ $\quad g(x) = x \leadsto g'(x) = 1$

$\|$

$x\cdot\frac{e^{3x}}{3} - \int \frac{e^{3x}}{3}\,1\,dx$

$= x\cdot\frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3}\frac{e^{3x}}{3} = \frac{xe^{3x}}{3} - \frac{e^{3x}}{9}$

ex3: Calculez $\int x^2e^{3x}dx = \frac{e^{3x}}{3}\cdot x^2 - \int \frac{e^{3x}}{3}\cdot 2x\,dx = \frac{e^{3x}x^2}{3} - \frac{2}{3}\int e^{3x}\cdot x\,dx$

$\begin{cases} f'(x) = e^{3x} \leadsto f(x) = \frac{e^{3x}}{3} \\ g(x) = x^2 \leadsto g'(x) = 2x \end{cases}$

$\begin{cases} f'(x) = e^{3x} \leadsto f(x) = \frac{e^{3x}}{3} \\ g(x) = x \leadsto g'(x) = 1 \end{cases}$

$= \frac{e^{3x}x^2}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{e^{3x}}{3}\cdot x - \int \frac{e^{3x}}{3}\cdot 1\,dx\right)$

$= \frac{e^{3x}x^2}{3} - \frac{2xe^{3x}}{9} + \frac{2}{3}\frac{1}{3}\left(\frac{e^{3x}}{3}\right) = \frac{e^{3x}x^2}{3} - \frac{2xe^{3x}}{9} + \frac{2e^{3x}}{27}$

$= \frac{e^{3x}}{3}\left(x^2 - \frac{2x}{3} + \frac{2}{9}\right).$

Méthodes pour déterminer une primitive: Par substitution

8. L'intégration par substitution découle de la règle de la dérivée de la composée de deux fonctions. Soit G une primitive de g.

$G' = g$

$$\boxed{(G(f(x)))' = g(f(x))f'(x)}$$
$$\int g(f(x))f'(x)dx = G(f(x)) + c$$
$$\int g(\underbrace{f(x)}_{=t})\underbrace{f'(x)dx}_{=dt} = \int \cancel{G(t)}\,g(t)\,dt \text{ où } t = f(x)$$

$t = f(x)$
$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = f'(x)$
$\|$

On peut donc retenir la liste des substitutions à effectuer:

$$f(x) = t, \quad f'(x)dx = dt$$

$\int g(f(x))f'(x)dx = \int g(t)dt$ où $t = f(x)$

On peut donc retenir la liste des substitutions à effectuer:

$$f(x) = t, \quad f'(x)dx = dt$$

$\Rightarrow \frac{dt}{dx} = f'(x)$

$= \frac{df(x)}{dx}$

$\Rightarrow dt = f'(x)dx$

Méthodes pour déterminer une primitive: Par substitution

Exemples

$\int \sin^2(x)\cos(x)dx$ par substitution:
On se rend compte que

$$g(x) = x^2, \quad f(x) = \sin(x), \quad f'(x) = \cos(x)$$

On substitue donc

$$\sin(x) = t, \quad \cos(x)dx = dt, \quad t = \sin(x)$$

$$\int \sin^2(x)\cos(x)dx = \int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + c = \frac{1}{3}\sin^3(x) + c$$

$t = \sin(x)$

$dt = \cos(x)dx$

$\int \sin^2(x)\cos(x)dx = \int t^2 dt$

$= \frac{t^3}{3} + c$

$= \frac{\sin^3(x)}{3} + c$

Par substitution : exercices

- **Exercice 1** : Trouver une primitive de $\cos(e^x)e^x$.
- **Exercice 2** : Trouver toutes les primitives de $\frac{\cos(x)}{\sin(x)+2}$.

Rappel : La méthode par substitution consiste à trouver une primitive d'une fonction de la forme $g(f(x))f'(x)$. Il s'agit de la règle de la chaîne, mais dans l'autre sens. Il faut donc :

- Identifier qui est $g(x)$, $f(x)$ et $f'(x)$.
- Puis, poser $f(x) = t$ et ainsi $f'(x)dx = dt$. On se retrouve donc à chercher une primitive de $g(t)$.
- Finalement, on remplace tous les t par $f(x)$ et le tour est joué.

Ex 1 : $\int \cos(\underbrace{e^x}_{t})\underbrace{e^x dx}_{dt} = \int \cos(t)dt = \sin(t) + c$

$= \sin(e^x) + c$

$t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx$

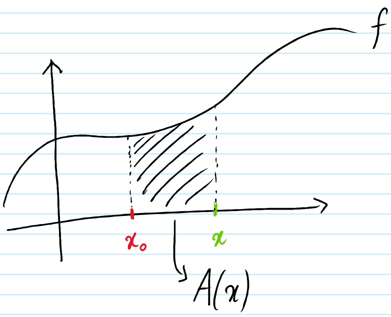
Ex 2 : $\int \frac{\cos(x)dx}{\underbrace{\sin(x)+2}_{t}}$ $= dt$ $= \int \frac{dt}{t+2} = \ln(|t+2|) + c$

$= \ln(|\sin(x)+2|) + c$

$t = \sin(x) \Rightarrow dt = \cos(x)dx$

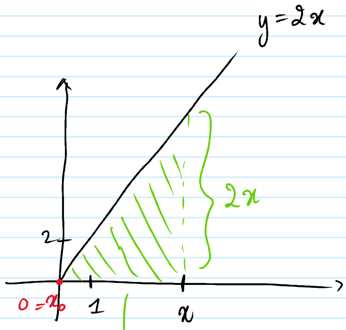
Interprétation géométrique

Soient la courbe C d'équation $y = f(x)$, où $f(x) \geq 0$ pour tout x, et x_0 une constante fixée. Alors, l'aire $A(x)$ délimitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites verticales passant par x_0 et x est une fonction de paramètre x qui est une primitive de $f(x)$, c'est-à-dire $A'(x) = f(x)$



Exemple de l'interprétation géométrique

Considérons la fonction $f(x) = 2x$ sur $\mathbb{R}_+$. Soit $x_0 = 0$. Dans cet exemple, la fonction A est donnée par $A(x) = x^2$. On remarque ainsi bien que $A'(x) = f(x)$ sur $\mathbb{R}_+$.



$\hookrightarrow A(x) = \frac{x \cdot 2x}{2} = x^2$

$A'(x) = 2x$

Exercices

Exercice : Trouver les primitives suivantes.

1. $\int \ln(x)dx$
2. $\int \frac{\ln(x)}{x}dx$
3. $\int x^2 e^{x^3}dx$
4. $\int e^x\cos(x)dx$

Ex 1

① $\int \ln(x)dx = \int 1 \cdot \ln(x)\,dx$

$= x\ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,dx$

$= x\ln(x) - \int 1\,dx$

$= x\ln(x) - x + C$

② $\int \frac{\ln(x)}{x}dx = \int t\,dt = \frac{t^2}{2} + C$

$= \frac{\ln(x)^2}{2} + C$

$t = \ln(x) \Rightarrow dt = \frac{1}{x}dx$

③ $\frac{1}{3}\int 3x^2 e^{x^3}dx = \frac{1}{3}\int e^t\,dt = \frac{1}{3}e^t + C$

$= \frac{1}{3}e^{x^3} + C$

$t = x^3 \Rightarrow dt = 3x^2dx$

④ $\int e^x\cos(x)\,dx = e^x\cos(x) + \int e^x\sin(x)\,dx$

$= e^x\cos(x) + e^x\sin(x) - \int e^x\cos(x)\,dx$

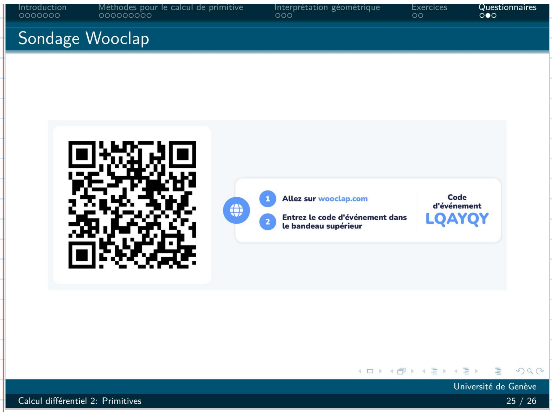
$\Rightarrow 2\int e^x\cos(x)dx = e^x(\cos(x) + \sin(x))$

$\Rightarrow \int e^x\cos(x)dx = \frac{e^x}{2}(\cos(x) + \sin(x))$

Sondage Wooclap

1. Allez sur wooclap.com
2. Entrez le code d'événement dans le bandeau supérieur

Code d'événement
LQAYQY


Introduction
Méthodes pour le calcul de primitive
Interprétation géométrique
Exercices
Questionnaires
Sondage Wooclap
Allez sur wooclap.com
Entrez le code d'événement dans le bandeau supérieur
Code d'événement
LQAYQY
Université de Genève
Calcul différentiel 2: Primitives
25 / 26


Introduction
Méthodes pour le calcul de primitive
Interprétation géométrique
Exercices
Questionnaires
Évaluation de la séance
Université de Genève
Calcul différentiel 2: Primitives
26 / 26