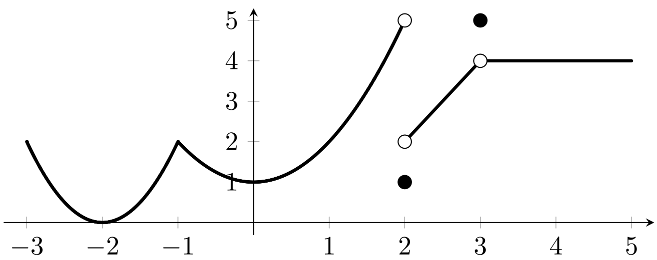
Correction des exercices sur les limites

14 septembre 2023

Exercice 1 (Approche graphique de la notion de limite)**.** *Soit* $f : [-3, 5] \to \mathbb{R}$ *une fonction dont le graphe est représenté ci-dessous :*



À la lecture du graphique, déterminer (1) $\lim_{x\to -1} f(x)$*, (2)* $f(2)$*, (3)* $\lim_{x\to 2} f(x)$*, (4)* $f(3)$*, (5)* $\lim_{x\to 3} f(x)$*.*

Indication : les points noirs appartiennent au graphe de f et les points blancs n'appartiennent pas au graphe de f.

Correction :

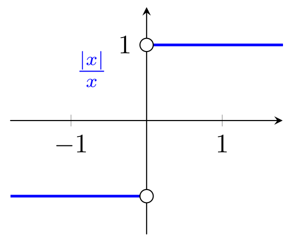
1. $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = 2$.
2. $f(2) = 1$.
3. $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ n'existe pas.
4. $f(3) = 5$.
5. $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 4$.

Exercice 2 (Calculs de limites)**.** *En utilisant les propriétés des limites, calculer les limites suivantes si elles existent.*

Correction :

1. $\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} 15 = 15$.
2. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{2x^2+5x-3}{3x^3-2x+7} = \dfrac{\lim_{x\to -2}(2x^2+5x-3)}{\lim_{x\to -2}(3x^3-2x+7)} = \dfrac{2\cdot(-2)^2+5\cdot(-2)-3}{3\cdot(-2)^3-2\cdot(-2)+7} = \dfrac{-5}{-13} = 5/13$.

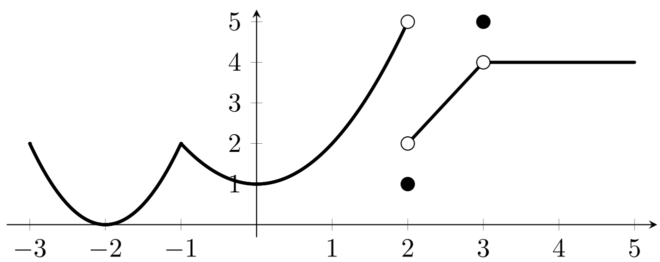
3. $\lim\limits_{x\to 3}(3x-9)^{1000} = (\lim\limits_{x\to 3} 3x-9)^{1000} = 0^{1000} = 0.$
4. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6} = \dfrac{\lim_{x\to 3}(x^2+2x-3)}{\lim_{x\to 3}(x^2+5x+6)} = \dfrac{3^2+2\cdot 3-3}{3^2+5\cdot 3+6} = 12/30 = 2/5.$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$. Puisque $|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$, on a $\dfrac{|x|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{si } x > 0 \\ -1, & \text{si } x < 0. \end{cases}$.



À la vue du graphe, on voit que $\frac{|x|}{x}$ n'approche pas de valeur spécifique lorsque x tend vers 0. Donc la limite n'existe pas.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{2x^2+3x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x(2x+3)} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} \cdot \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2x+3} = 1\cdot 1/3 = 1/3$ (c.f. conjecture $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$).
7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2(x)-1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\sin^2(x)}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{-\sin(x)}{x} \dfrac{\sin(x)}{x} \right) = -\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = -1\cdot 1 = -1.$
8. $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ n'existe pas, car $\sin(\dfrac{1}{\sqrt{x}})$ n'approche pas une valeur spécifique lorsque $x \to 0$.

Exercice 3 (Approche graphique des limites à gauche et à droite)**.** *Soit* $f : [-3,5] \to \mathbb{R}$ *une fonction dont le graphe est représenté ci-dessous :*



À la lecture du graphique, déterminer (1) $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, *(2)* $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, *(3)* $\lim_{x\to 3^-} f(x)$, *(4)* $\lim_{x\to 3^+} f(x)$.

Indication : les points noirs appartiennent au graphe de f et les points blancs n'appartiennent pas au graphe de f.

Correction :

1. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 5.$
2. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 2.$

3. $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 4$.
4. $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$.

Exercice 4. *Comme nous l'avons fait pour* $\dfrac{0}{0}$*, expliquer en quoi* $\dfrac{\infty}{\infty}$*,* $0\cdot\infty$*,* $\infty-\infty$ *sont des opérations non-définies.*

Correction :

à venir

Exercice 5. *Calculer les limites suivantes :*

1. $\displaystyle\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{3}}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{x-2}{x^3-8}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to 16} \frac{x-16}{\sqrt{x}-4}$
4. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{4-\sqrt{16+h}}{h}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{5x^4-9x+1}{3x^3-5x^2+8}$
6. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{1+h}}-1\right)$
7. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} \frac{x^2-\pi x+6}{3x^2-\ln(e)x^2+1}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2-9}{(x-3)(x+3)(x+7)}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} 4x^3+5x^{10}-3$
10. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$

Correction :

à venir