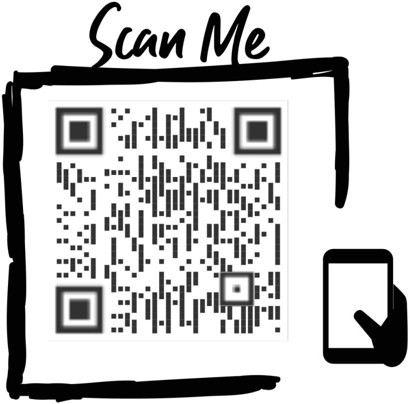
CAFE-S - Matrices

Axel CAULIER, Pedro GIESTEIRA, Charlène MICHELOT

Vendredi 15 septembre 2023

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

Documents de CAFE-S : Lien Moodle



Sondage Wooclap

Sommaire

1 Définition et opérations sur les matrices
- Définition d'une matrice
- Matrices égales
- Addition de matrices
- Produit matriciel
  - Produit d'une matrice par un scalaire
  - Produit d'une matrice par une matrice colonne
  - Produit de deux matrices
- Soustraction de deux matrices
- Inversion de matrices
  - Matrice identité
  - Matrice inversible
  - Inverse de matrice 2×2 et déterminant
- Exercices I
- Correction I

Définition (Matrice)

Une *matrice* est une tableau rectangulaire de nombres qui est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Une matrice est dite de *taille* $m \times n$ si elle est constituée de m lignes et n colonnes.
Les nombres a_{ij} ($a_{ij} \in \mathbb{R}$) qui figurent dans une matrice sont appelés les *coefficients* de la matrice.

Terminologie

À la suite de ces exemples, nous allons introduire la terminologie suivante :

1. *Une matrice de taille $n \times n$ est une matrice carrée et de taille n.*
2. *Une matrice de taille $1 \times n$ est une matrice ligne.*
3. *Une matrice de taille $n \times 1$ est une matrice colonne.*

Proposition

Deux matrices $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}}$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq k \\ 1 \leq j \leq \ell}}$ *sont égales si, et seulement si,* A *et* B *sont de* ***même taille****, c'est-à-dire* $m = k$ *et* $n = \ell$ *et si, pour tous* i *et* j *:*

$$a_{ij} = b_{ij}$$

c'est-à-dire que ***les coefficients à la même position sont égaux****.*

Définition

Soient A et B deux matrices de taille $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

À condition que A et B soient de la **même taille**, nous définissons leur *addition* $A + B$ comme suit :

Définition (suite)

$$A + B$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m_1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{m3} b_{m3} & \dots & a_{mn} b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Proposition

*L'addition de matrices est **commutative** : pour toutes matrices de même taille A et B, nous avons*

$$A + B = B + A.$$

c'est-à-dire que le résultat ne change pas si nous échangeons les termes de places.

Proposition

*L'addition de matrices est **associative** : pour toutes matrices de même taille A, B et C, nous avons*

$$A + (B + C) = (A + B) + C,$$

c'est-à-dire que nous avons le droit de regrouper des termes ensemble, sans changer le résultat.

Produit d'une matrice par un scalaire : Intuition

$$\begin{aligned} 2 \cdot A &= 2 \cdot (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \\ &= (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} + (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \\ &= (a_{ij} + a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \\ &= (2 \cdot a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \end{aligned}$$

Ce qui nous amène à :

Produit d'une matrice par un scalaire

Définition (Produit d'une matrice par un scalaire)

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit A une matrice de taille $m \times n$.
Nous définissons le *produit de A par λ* comme suit :

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \lambda \cdot a_{13} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \lambda \cdot a_{23} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \lambda \cdot a_{m3} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

Proposition

Soient A et B deux matrices même taille et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$, *c'est la distributivité du produit sur la somme des scalaires.*
2. $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$, *c'est la distributivité du produit sur la somme des matrices.*
3. $(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$, *c'est l'associativité du produit d'une matrice par plusieurs scalaires.*
4. $\lambda \cdot A = A \cdot \lambda$, *c'est la commutativité du produit d'une matrice par un scalaire.*

Produit d'une matrice par une matrice colonne

Définition (Produit d'une matrice par une matrice colonne)

Soient A et B deux matrices de tailles respectives $m \times n$ et $n \times 1$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}.$$

Nous définissons le *produit de A par B*, qui est une matrice colonne de taille $m \times 1$, comme suit :

Définition (suite)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n1} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + \cdots + a_{2n} \cdot b_{n1} \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{11} + a_{m2} \cdot b_{21} + \cdots + a_{mn} \cdot b_{n1} \end{pmatrix}$$

Exemple

Considérons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nous avons :

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 7 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 3 + -2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Produit de deux matrices

Définition (Produit de deux matrices)

Soient A et B deux matrices de tailles respectives $m \times n$ et $n \times p$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}.$$

Nous définissons le *produit* $A \cdot B$ des deux matrices A et B comme suit :

Définition (suite)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot b_{kp} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k} \cdot b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k} \cdot b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k} \cdot b_{kp} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk} \cdot b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{mk} \cdot b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk} \cdot b_{kp} \end{pmatrix}$$

Remarque

Afin de pouvoir multiplier deux matrices A et B de tailles respectives $m \times n$ et $k \times \ell$, il faut que $n = k$. Dans ce cas, nous disons que A et B sont compatibles.

Remarque

En général, si A est de taille $m \times n$ et B est de taille $n \times p$, $A \cdot B$ sera une matrice de taille $m \times p$.

Astuce de calcul : En règle générale, dans $C := A \cdot B$, le coefficient c_{ij} s'obtient en multipliant la ligne i de A et la colonne j de B.

Exemple

Considérons

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

A est de taille 2×2 et B est de taille 2×3, elles sont donc compatibles.
Nous avons :

Exemple (suite)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot 7 + (-2) \cdot 4 & 5 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) & 5 \cdot 2 + (-2) \cdot 6 \\ 1 \cdot 7 + 3 \cdot 4 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 27 & 2 & -2 \\ 19 & -3 & 20 \end{pmatrix}$$

Exemple (suite)

En revanche, le produit $B \cdot A$ n'est pas possible, comme B possède 3 colonnes et A possède 2 lignes.

Question :

Est-ce que le produit de deux matrices est commutatif ?

Exemple (suite)

Si B avait été une matrice carrée de taille 2, les deux produits auraient été possibles. Pour cela, considérons :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} A \cdot \tilde{B} &= \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 5 \cdot 7 + (-2) \cdot 4 & 5 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) \\ 1 \cdot 7 + 3 \cdot 4 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 27 & 2 \\ 19 & -3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Exemple (suite)

Tandis que :

$$\begin{aligned}\tilde{B} \cdot A &= \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 \cdot 5 + 0 \cdot 1 & 7 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 \\ 4 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 & 4 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 35 & -14 \\ 19 & -11 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Nous remarquons que

$$A \cdot \tilde{B} \neq \tilde{B} \cdot A$$

Proposition

Soient A, B et C trois matrices carrées de même taille. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

1. *Le produit matriciel est associatif :* $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.
2. *Le produit matriciel se distribue sur l'addition, à droite et à gauche :*

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad \text{et } (B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A.$$

3. *Nous avons :*

$$\lambda \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\lambda \cdot B).$$

Définition (Soustraction de deux matrices)

Soient A et B deux matrices **de même taille**.
La *soustraction* $A - B$ est définie ainsi :

$$A - B = A + (-1) \cdot B.$$

Exemple

Prenons :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 0 & 41 & -1 \\ 7 & -11 & -3 \\ 4 & -21 & 6 \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 8 \\ -20 & 7 & 19 \\ -2 & 6 & 13 \\ -11 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ces deux matrices sont de taille 4×3. Nous pouvons donc les soustraire :

Exemple (suite)

$$A - B = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 0 & 41 & -1 \\ 7 & -11 & -3 \\ 4 & -21 & 6 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 12 & 8 \\ -20 & 7 & 19 \\ -2 & 6 & 13 \\ -11 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5 + -1 & 2 + -12 & 1 + -8 \\ 0 + 20 & 41 + -7 & -1 + -19 \\ 7 + 2 & -11 + -6 & -3 + -13 \\ 4 + 11 & -21 + 0 & 6 + 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -6 & -10 & -7 \\ 20 & 34 & -20 \\ 9 & -17 & -16 \\ 15 & -21 & 10 \end{pmatrix}$$

Matrice identité

Définition (Matrice identité)

Nous appelons *matrice identité de taille n* la matrice carrée de taille n suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Matrice inversible

Définition (Matrice inversible)

Soit A une matrice **carrée** de taille n.
A est une *matrice inversible* s'il existe une matrice B carrée de taille n telle que

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

Nous appelons B la *matrice inverse* de A.

Inverse de matrice 2×2 et déterminant

Dans ce cours, nous nous limiterons au cas des matrices carrées de taille 2.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

A est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$, et son inverse est donné par

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Terminologie

Nous appelons $ad - bc$ le déterminant de la matrice A, que nous notons $\det(A)$.

Exercices I

Exercices

Exercice 1 : *Considérons les matrices suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 17 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 17 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

Les matrices A et B sont-elles égales ? Calculer $A + B$, $-3B$, $A \cdot B$ et $A \cdot C$.

Exercice 2 : *Calculer l'inverse de chacune des matrices suivantes :*

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Correction I - Exercice 1

Correction

Exercice 1 :

Considérons les matrices A et B ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 17 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 17 & 2 \end{pmatrix}$$

Bien que A et B soient de même taille (à savoir 2×2), elles ne sont pas égales car :

$$a_{11} = 6 \neq -6 = b_{11}.$$

Ceci signifie qu'il y a un coefficient qui n'est pas commun aux deux matrices.

Correction (Exercice 1 - Suite)

Effectuons les calculs demandés :

$$\begin{aligned} A+B &= \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 17 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 17 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6+(-6) & -5+(-5) \\ 17+17 & 2+2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -10 \\ 34 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notons qu'il a été possible d'additionner A et B car elles sont la même taille. A contrario, l'addition de A et C n'aurait pas été possible, étant donné que les deux matrices sont de tailles différentes.

Correction (Exercice 1 - Suite)

$$\begin{aligned}
-3B &= (-3)\cdot\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 17 & 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (-3)\cdot(-6) & (-3)\cdot(-5) \\ (-3)\cdot 17 & (-3)\cdot 2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 18 & 15 \\ -51 & -6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Correction (Exercice 1 - Suite)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 17 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 17 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 6 \cdot (-6) + (-5) \cdot 17 & 6 \cdot (-5) + (-5) \cdot 2 \\ 17 \cdot (-6) + 2 \cdot 17 & 17 \cdot (-5) + 2 \cdot 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -121 & -40 \\ -68 & -81 \end{pmatrix}$$

Notons qu'il a été possible de multiplier A et B car celles-ci sont compatibles. A contrario, le produit de A et C n'est pas possible, étant donné que A est de taille 2×2 et C de taille 1×3, ce qui les rend incompatibles.

Correction I - Exercice 2

Correction

Exercice 2 :

Dans cet exercice, nous souhaitons calculer l'inverse, s'il existe, de deux matrices carrées de taille 2. Pour cela, rappelons qu'une matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est inversible si, et seulement si, $\det(A) = ad - bc \neq 0$*, et son inverse est donné par*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Correction (Exercice 2 - Suite)

Considérons la matrice D :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix},$$

et commençons par calculer $\det(D)$. *Si* $\det(D) = 0$, *l'inverse n'existe pas. Sinon, celui-ci existe et s'obtient facilement grâce au rappel.*

$$\det(D) = 1 \cdot 3 - 4 \cdot (-1) = 7 \neq 0.$$

Ainsi, son inverse est donné par :

$$D^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{-4}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}.$$

Correction (Exercice 2 - Suite)

Considérons maintenant la matrice E :

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix},$$

et, comme avant, calculons $\det(E)$*. Si* $\det(E) = 0$*, l'inverse n'existe pas. Sinon, celui-ci existe et s'obtient facilement grâce au rappel.*

$$\det(E) = 1 \cdot (-2) - (-1) \cdot 2 = 0.$$

Donc, E^{-1} *n'existe pas !*

Sommaire (suite)

2 Systèmes linéaires
- Définition d'un système linéaire
- Opérations autorisées sur les lignes d'un système linéaire
- Systèmes linéaires carrés
  - Résolution d'un système linéaire carré par substitution
  - Système avec une infinité de solutions
  - Nombre de solutions d'un système carré
  - Résolution d'un système linéaire carré avec la matrice inverse
- Systèmes linéaires rectangulaires
- Exercices II
- Correction II

Définition (Système linéaire)

Un **système linéaire à m équations et n inconnues** consiste en des équations de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & \cdots & a_{1,n-1}x_{n-1} & + & a_{1,n}x_n = b_1 & & (L_1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & \cdots & a_{m,n-1}x_{n-1} & + & a_{m,n}x_n = b_m & & (L_m) \end{array}\right.$$

Terminologie

- *Si $m = n$, c'est-à-dire s'il y autant d'équations que d'inconnues le système est dit **carré**.*
- *Dans le cas contraire, si $m \neq n$, le système est dit **rectangulaire**.*

Remarque

Étant donné un système linéaire à m équations et n inconnues

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & \cdots & a_{1,n-1}x_{n-1} & + & a_{1,n}x_n = b_1 \quad (L_1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & \cdots & a_{m,n-1}x_{n-1} & + & a_{m,n}x_n = b_m \quad (L_m) \end{array}\right.$$

il nous est possible de le réécrire à l'aide de matrices.
Nous allons introduire la matrice des coefficients, la matrice des inconnues et une troisième matrice :

Remarque (suite)

*La **matrice des coefficients** sera la matrice A suivante, de taille $m \times n$ dans laquelle nous stockons tous les coefficients a_{ij} de notre système, suivant leur ordre d'apparition :*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Remarque (suite)

*La **matrice des inconnues** sera un vecteur colonne x, de taille $n \times 1$, dans laquelle se trouvent toutes les inconnues du système, suivant leur ordre d'indexation :*

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Remarque (suite)

Finalement, assez logiquement, la troisième matrice sera le vecteur colonne regroupant les $b_1, \ldots, b_m$*, que nous noterons* B *et qui sera de taille* $m \times 1$ *:*

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Remarque (suite)

Ainsi, respectivement à ces trois nouvelles matrices que nous avons introduites, nous pouvons réécrire

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & \cdots & a_{1,n-1}x_{n-1} & + & a_{1,n}x_n = b_1 & (L_1) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & \cdots & a_{m,n-1}x_{n-1} & + & a_{m,n}x_n = b_m & (L_m) \end{array}\right.$$

comme :

$$A \cdot x = B.$$

Remarque

Les matrices A et x sont bien compatibles pour la multiplication et leur produit est bien une matrice de taille $m \times 1$.

Proposition

Trois opérations sur les lignes d'un système linéaire qui ne changent pas ses solutions :

1. *Additionner des lignes entre elles*
2. *Multiplier une ligne par une constante non nulle*
3. *Échanger des lignes entre elles*

À ce stade, il est naturel de nous demander si ces trois opérations permettent de simplifier un système, afin de le rendre plus facile à résoudre.

Exemple

Considérons le système ci-dessous :

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 = 2 & (L_1) \\ 3x_1 & + & x_2 = 3 & (L_2) \end{cases}$$

Nous commençons par remarquer qu'il nous est possible d'éliminer la variable x_1 dans (L_2) en additionnant $-3 \cdot (L_1)$ à (L_2). Ceci est utile car, une fois effectué, nous pourrons déduire la valeur de x_2, à partir (L_2), assez facilement.
Dès lors, en isolant x_1 dans (L_1) et connaissant la valeur de x_2, la valeur de x_1 est immédiatement obtenue.

Exemple (suite)

D'une part :

$$\left\{\begin{array}{rcrl} x_1 & + & x_2 = 2 & (L_1) \\ 3x_1 & + & x_2 = 3 & (L_2) \end{array}\right.$$

$$\rightsquigarrow \left\{\begin{array}{rcrl} x_1 & + & x_2 = 2 & (L_1) \leftarrow (L_1) \\ 0x_1 & + & -2x_2 = -3 & (L_2) \leftarrow (L_2) + (-3) \cdot (L_1) \end{array}\right.$$

(L_2) *nous donne immédiatement que* $\boxed{x_2 = \frac{3}{2}}$.

Exemple (suite)

D'autre part :

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 = 2 & (L_1) \\ 3x_1 & + & x_2 = 3 & (L_2) \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 & = 2 - x_2 & (L_1) \\ x_2 & = \frac{3}{2} & (L_2) \end{cases}$$

Ainsi :

$$\boxed{x_1 = 2 - x_2} = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

En conclusion, la solution du système est $\boxed{x = (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)}$.

Nous allons introduire une méthode de résolution de systèmes linéaires carrés (c'est-à-dire $m = n$) :

Algorithme (Résolution par substitution)

Étant donné un système linéaire carré, nous commençons par isoler x_1 dans (L_1) : x_1 s'écrit en fonction des $x_2, \dots, x_n$. Dans les lignes (L_2) jusqu'à (L_n), nous remplaçons x_1 par son expression trouvée en (L_1). Nous faisons de même avec x_2 : nous l'isolons dans (L_2) de sorte à obtenir une expression en fonction des $x_3, \dots, x_n$, et remplaçons x_2 par son expression dans les lignes suivantes. Nous itérons ce procédé jusqu'à la ligne (L_n), dans laquelle il ne reste plus que x_n, ce qui nous permet d'en déduire la valeur directement. Ensuite, nous remplaçons x_n par sa valeur dans (L_{n-1}), afin de trouver x_{n-1}. Nous réitérons cette même méthode afin de déterminer $x_{n-2}, x_{n-3}, \dots, x_3, x_2, x_1$.

Exemple

Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 = 2 & (L_1) \\ 3x_1 & + & x_2 = 3 & (L_2) \end{cases}$$

Nous pouvons changer la ligne (L_1) *en additionnant* $-x_2$*, ce qui permet d'isoler* x_1 *:*

$$\begin{cases} x_1 & = & 2 - x_2 & (L_1) \\ 3x_1 + x_2 & = & 3 & (L_2) \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant utiliser (L_1) *et remplacer* x_1 *dans* (L_2)*, afin d'obtenir une équation avec une seule inconnue dans* (L_2)*.*

Exemple (suite)

Il nous reste donc à isoler x_2 dans (L_2) pour déterminer l'inconnue :

$$\overset{remplacer}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{rcll} x_1 & = & 2 - x_2 & (L_1) \\ 3(2-x_2)+x_2 & = & 3 & (L_2) \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x_1 & = & 2 - x_2 & (L_1) \\ 6 - 2x_2 & = & 3 & (L_2) \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} x_1 & = & 2 - x_2 & (L_1) \\ x_2 & = & \frac{3}{2} & (L_2) \end{array} \right.$$

$\boxed{\text{Nous avons trouvé } x_2 = \frac{3}{2}. \text{ Par } (L_1) : x_1 = 2 - x_2 = \frac{1}{2}.}$

En conclusion, la solution du système est $\boxed{x = (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)}$; *nous retombons sur ce que nous avions déjà déterminé.*

Un système ayant une infinité de solutions

Exemple

Considérons le système :

$$\begin{cases} 2x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & + & 9x_2 & + & 1x_3 & = & 2 \\ 6x_1 & + & 11x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 4 & 9 & 1 \\ 6 & 11 & 4 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

En résolvant le système par la méthode de substitution, nous trouvons :

Exemple (suite)

$$\overset{\text{Étape 1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x_1 & = & \frac{1-2x_2-3x_3}{2} \\ x_2 & = & x_3 \\ 3+5(x_3)-5x_3 & = & 3 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 & = & \frac{1-2x_2-3x_3}{2} \\ x_2 & = & x_3 \\ 3 & = & 3 \end{cases}$$

Nous observons qu'il n'y aucune condition sur la variable x_3 (la ligne (L_3) est une tautologie[a]), donc nous pouvons prendre n'importe quel réel comme solution pour x_3, $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$.

a. Une tautologie est une affirmation toujours vraie, indépendemment de l'inconnue $x = (x_1, x_2, x_3)$

Exemple (suite)

Il en découle, par (L_2)*, que* $x_2 = x_3 = \lambda$ *et, par* (L_1)*, que* $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\lambda$*.*
L'ensemble des solutions de notre système est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{5}{2}\lambda, \lambda, \lambda \right) \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Terminologie

λ *comme dans l'ensemble des solutions ci-dessus est une* ***variable libre****.*

Proposition

Soit $A \cdot x = b$ *un système linéaire carré, c'est-à-dire* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

1. $A \cdot x = b$ *a une unique solution* $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$
2. $A \cdot x = b$ *a une infinité ou aucune solution* $\Leftrightarrow \det(A) = 0$

Remarque

Il existe une autre méthode pour trouver la solution de $Ax = b$. Lorsque A est inversible, c'est-à-dire lorsque $\det(A) \neq 0$, *nous pouvons trouver la solution du système en utilisant la matrice inverse A^{-1}*

$$Ax = b \iff \underbrace{A^{-1}A}_{=I_n}x = A^{-1}b \iff x = A^{-1}b$$

Considérons maintenant des systèmes rectangulaires ($m \neq n$) :

Remarque

La méthode de résolution par substitution est valable pour les systèmes linéaires de m équations à n inconnues. La différence est que nous allons forcément faire apparaître ce que nous appelons des ***variables libres****, comme vu dans l'exemple du système carré ayant une infinité de solutions ; nous le verrons en exercices.*
En particulier, les systèmes linéaires rectangulaires admettent ou bien une infinité de solutions ou bien aucune solution.

Exercices II

Exercices

Exercice 1 : *Résoudre les systèmes $Ax = b$ pour les A et b suivants :*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : *Résoudre le système suivant, à l'aide de la matrice inverse de A :*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{b}$$

Correction II - Exercice 1

Correction

Exercice 1 :

Résolvons les systèmes $Ax = b$ pour les A et b suivants :

1. $$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

   C'est équivalent au système suivant :

   $$\begin{cases} 0x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 0 \\ 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 & = & 0 \\ 0x_1 + 4x_2 + 6x_3 & = & 2 \end{cases}$$

Correction (Exercice 1 - Suite)

1. *Résolvons-le par substitution :*

$$\iff \begin{cases} 1x_1 + 0x_2 + 0x_3 & = & 0 \\ 0x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 0 \\ 0x_1 + 4x_2 + 6x_3 & = & 2 \end{cases}$$

Nous avons échangé les lignes 1 et 2. En isolant x_2 dans la deuxième ligne :

$$\iff \begin{cases} 1x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & -\frac{3}{2}x_3 \\ 0x_1 + 4x_2 + 6x_3 & = & 2 \end{cases}$$

En substituant x_2 dans la troisième ligne :

Correction (Exercice 1 - Suite)

1.

$$\iff \begin{cases} 1x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & -\frac{3}{2}x_3 \\ 4\left(-\frac{3}{2}x_3\right) + 6x_3 & = & 2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & -\frac{3}{2}x_3 \\ 0 & = & 2 \end{cases}$$

À la dernière ligne, nous trouvons $2 = 0$*, ce qui est faux pour tout* $x \in \mathbb{R}^3$*. Donc ce système n'admet aucune solution.*

Correction (Exercice 1 - Suite)

2.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

C'est équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} 0x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 0 \\ 1x_1 + 3x_2 + 0x_3 & = & 0 \end{cases}$$

Résolvons-le par substitution :

Correction (Exercice 1 - Suite)

2.

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 1x_1 + 3x_2 + 0x_3 & = & 0 \\ 0x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Nous avons échangé les lignes 1 et 2. En isolant x_2 dans la deuxième ligne :

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 1x_1 & = & -3x_2 \\ x_3 & = & -\frac{2}{3}x_2 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x_1 & = & -3x_2 \\ x_3 & = & -\frac{2}{3}x_2 \end{array} \right.$$

Correction (Exercice 1 - Suite)

2. *Les lignes 1 et 2 signifient que x_1 et x_3 s'expriment en fonction de x_2, et que nous n'avons aucune condition sur x_2, ce qui fait que tout $x_2 \in \mathbb{R}$ est admissible. x_2 est ce que nous appelons un* ***paramètre libre****, et nous écrirons : $x_2 := \lambda$.*
En l'occurrence, la liberté sur la valeur de x_2 nous procure une infinité de solutions à notre système. En effet, l'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} -3\lambda \\ \lambda \\ -\frac{2}{3}\lambda \end{pmatrix} \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Correction II - Exercice 2

Correction

Exercice 2 :

Considérons le système

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Puisque c'est un système carré, nous pouvons calculer le déterminant de la matrice A. En effet, cela est utile car, si $\det(A) \neq 0$, *le système possède une unique solution* $x = A^{-1}b$. *Le cas contraire, notre système ne possède aucune ou une infinité de solutions (que nous pourrons déterminer en résolvant le système par substitution, par exemple).*

Correction (Exercice 2 - Suite)

Nous avons :

$$\det(A) = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 9 = -19 \neq 0,$$

ce qui rend la matrice A inversible !
Notre système possède, en conséquence, l'unique solution

$$x = A^{-1}b.$$

Grâce au cours sur les matrices, nous sommes en mesure de statuer que

$$A^{-1} = \frac{1}{-19}\begin{pmatrix} -1 & -9 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction (Exercice 2 - Suite)

Ce qui nous conduit à :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{-19}\begin{pmatrix} -1 & -9 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{19}\begin{pmatrix} (-1)\cdot(-1)+(-9)\cdot 0 \\ (-2)\cdot(-1)+1\cdot 0 \end{pmatrix} \\ &= -\frac{1}{19}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sondage Wooclap

1 **Allez sur wooclap.com**

2 **Entrez le code d'événement dans le bandeau supérieur**

Code d'événement
REXRMZ

Questionnaire UNIGE