Calcul différentiel 2: Primitives

Programme CAFE-S

Université de Genève

Septembre 2023

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES

Lien vers OMB+

1 Introduction

2 Méthodes pour le calcul de primitive

3 Interprétation géométrique

4 Exercices

5 Questionnaires

Premières notions

Nous mettons directement la notion de primitive avec celle de dérivée, sans motiver ici leur lien.

Définition

Une fonction F est dite *primitive* d'une fonction f sur un intervalle I, si et seulement si $F'(x) = f(x), \forall x \in I$. On écrit
$\int f(x)dx = F(x)$

Exemples

Soit $f(x) = 3x^2$. Alors

- $F(x) = x^3$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, car $(x^3)' = 3x^2$.

Premières notions

Nous mettons directement la notion de primitive avec celle de dérivée, sans motiver ici leur lien.

Définition

Une fonction F est dite *primitive* d'une fonction f sur un intervalle I, si et seulement si $F'(x) = f(x), \forall x \in I$. On écrit
$\int f(x)\,dx = F(x)$

Exemples

Soit $f(x) = 3x^2$. Alors

- $F(x) = x^3$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, car $(x^3)' = 3x^2$.
- $F(x) = x^3 + 1$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, car $(x^3 + 1)' = 3x^2$.

Relation entre toutes les primitives

Théorème

Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, et soient F et G deux primitives de f. Alors on a $F(x) = G(x) + c, \forall x \in I$, où c est une constante.

Relation entre toutes les primitives

Théorème

Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue, et soient F et G deux primitives de f. Alors on a $F(x) = G(x) + c, \forall x \in I$, où c est une constante.

Donc si $F(x) = x^3$ est une primitive de f, $G(x) = x^3 + c$ est la famille de toutes les primitives de f.

Primitives élémentaires

1. c est une primitive de 0.

Primitives élémentaires

1. c est une primitive de 0.
2. x est une primitive de 1.

Primitives élémentaires

1. c est une primitive de 0.
2. x est une primitive de 1.
3. $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de x^n.

Primitives élémentaires

1. c est une primitive de 0.
2. x est une primitive de 1.
3. $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de x^n.
4. $\sqrt{x}$ est une primitive de $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Primitives élémentaires

1. c est une primitive de 0.
2. x est une primitive de 1.
3. $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de x^n.
4. $\sqrt{x}$ est une primitive de $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
5. $\frac{1}{x}$ est une primitive de $-\frac{1}{x^2}$.

Primitives élémentaires

1. c est une primitive de 0.
2. x est une primitive de 1.
3. $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de x^n.
4. $\sqrt{x}$ est une primitive de $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
5. $\frac{1}{x}$ est une primitive de $-\frac{1}{x^2}$.
6. $-\cos(x)$ est une primitive de $\sin$.

Primitives élémentaires

1. c est une primitive de 0.
2. x est une primitive de 1.
3. $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de x^n.
4. $\sqrt{x}$ est une primitive de $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
5. $\frac{1}{x}$ est une primitive de $-\frac{1}{x^2}$.
6. $-\cos(x)$ est une primitive de $\sin$.
7. $\sin(x)$ est une primitive de $\cos(x)$.

Primitives élémentaires

1. c est une primitive de 0.
2. x est une primitive de 1.
3. $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ est une primitive de x^n.
4. $\sqrt{x}$ est une primitive de $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.
5. $\frac{1}{x}$ est une primitive de $-\frac{1}{x^2}$.
6. $-\cos(x)$ est une primitive de $\sin$.
7. $\sin(x)$ est une primitive de $\cos(x)$.
8. $\tan(x)$ est une primitive de $1+\tan^2(x)$.

Propriétés des primitives

Soient $f : [a;b] \mapsto \mathbb{R}$ et $g : [a;b] \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions qui admettent des primitives sur $[a;b]$. Alors

1. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$, $\forall k \in \mathbb{R}$
   Ex: $\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx = 3\frac{x^3}{3} = x^3$.

Propriétés des primitives

Soient $f : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ et $g : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions qui admettent des primitives sur $[a; b]$. Alors

1. $\int kf(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$, $\forall k \in \mathbb{R}$
   Ex: $\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx = 3\frac{x^3}{3} = x^3$.
2. $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
   Ex: $\int (x^2 + 4x)\,dx = \int x^2\,dx + \int 4x dx = \frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{3} + 2x^2$.

Propriétés des primitives

Soient $f : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ et $g : [a; b] \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions qui admettent des primitives sur $[a; b]$. Alors

1. $\int kf(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$, $\forall k \in \mathbb{R}$
   Ex: $\int 3x^2\,dx = 3\int x^2\,dx = 3\frac{x^3}{3} = x^3$.
2. $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
   Ex: $\int (x^2 + 4x)\,dx = \int x^2\,dx + \int 4x dx = \frac{x^3}{3} + 4\frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{3} + 2x^2$.
3. $\int (f(x) - g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$
   Ex: $\int (\frac{x}{2} - e^x)\,dx = \int \frac{x}{2}\,dx - \int e^x\,dx = \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} - e^x = \frac{x^2}{4} - e^x$.

Propriétés des primitives

4. $\int (g'(f(x))f'(x)dx = g(f(x))$, puisque $(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x) \rightarrow$ Règle de la chaîne.

Propriétés des primitives

4. $\int (g'(f(x))f'(x)dx = g(f(x))$, puisque $(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x) \rightarrow$ Règle de la chaîne.
   Ex:
   - $\int (x^2-3)^4 2xdx = \frac{(x^2-3)^5}{5}$

Propriétés des primitives

4. $\int (g'(f(x))f'(x)dx = g(f(x))$, puisque $(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x) \rightarrow$ Règle de la chaîne.
Ex:
   - $\int (x^2-3)^4 2x dx = \frac{(x^2-3)^5}{5}$
   - $\int (x^2-3)^4 x dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2-3)^5}{5} = \frac{(x^2-3)^5}{10}$

Propriétés des primitives

4. $\int (g'(f(x))f'(x)dx = g(f(x))$, puisque $(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x) \rightarrow$ Règle de la chaîne.

Ex:

- $\int (x^2-3)^4 2x dx = \frac{(x^2-3)^5}{5}$
- $\int (x^2-3)^4 x dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2-3)^5}{5} = \frac{(x^2-3)^5}{10}$
- $\int \cos(x^5) 7x^4 dx = \frac{7}{5}\sin(x^5)$

Propriétés des primitives

4. $\int (g'(f(x))f'(x)\,dx = g(f(x))$, puisque $(g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x)$ $\rightarrow$ Règle de la chaîne.

Ex:

- $\int (x^2-3)^4 2x dx = \frac{(x^2-3)^5}{5}$
- $\int (x^2-3)^4 x dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2-3)^5}{5} = \frac{(x^2-3)^5}{10}$
- $\int \cos(x^5)7x^4\,dx = \frac{7}{5}\sin(x^5)$
- $\int \cos(\sin(x^5))\cos(x^5)x^4\,dx = \frac{\sin(\sin(x^5))}{5}$

Exercice

Exercice : Trouver les primitives suivantes.

1. $\int (x^4 - \cos(x))\, dx$
2. $\int \pi\, e^x\, dx$
3. $\int \left(\sum_{k=0}^{5} x^k\right) dx$

1 Introduction

2 Méthodes pour le calcul de primitive

3 Interprétation géométrique

4 Exercices

5 Questionnaires

Méthodes pour déterminer une primitive

4. S'agit-il d'une primitive élémentaire?
   Exemple: $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x}$.

Méthodes pour déterminer une primitive

4. S'agit-il d'une primitive élémentaire?
   Exemple: $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x}$.

5. Peut-on utiliser les propriétés des primitives?
   Exemples:
   - $\int (3x^2 - 2)\,dx = \int 3x^2\,dx - \int 2\,dx = 3\int x^2\,dx - 2\int 1\,dx = 3\frac{x^3}{3} - 2x = x^3 - 2x$
   - $\int -\cos(\cos(x))\sin(x)\,dx = \int \cos(\cos(x))(-\sin(x))\,dx = \int \cos(\cos(x))\cos'(x)\,dx = \sin(\cos(x))$

Méthodes pour déterminer une primitive

4. S'agit-il d'une primitive élémentaire?
   Exemple: $\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x}$.

5. Peut-on utiliser les propriétés des primitives?
   Exemples:
   - $\int (3x^2 - 2)\,dx = \int 3x^2\,dx - \int 2\,dx = 3\int x^2\,dx - 2\int 1\,dx = 3\frac{x^3}{3} - 2x = x^3 - 2x$
   - $\int -\cos(\cos(x))\sin(x)\,dx = \int \cos(\cos(x))(-\sin(x))\,dx = \int \cos(\cos(x))\cos'(x)\,dx = \sin(\cos(x))$

6. Peut-on récrire $f(x)$ pour simplifier le calcul?
   Exemple: $\int \frac{x^3+2}{x^2}\,dx = \int (\frac{x^3}{x^2} + \frac{2}{x^2})\,dx = \int (x + \frac{2}{x^2})\,dx = \int x dx + 2\int \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} + 2(-\frac{1}{x}) = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{x}$.

Méthodes pour déterminer une primitive: Par parties

7. Lorsque nous avons affaire à une primitive qui contient un produit de deux fonctions et que les méthodes précédentes ne fonctionnent pas, nous pouvons utiliser le théorème suivant:

Théorème

Soit f et g deux fonctions dérivables sur $[a; b]$, telles que f' et g' soient continues sur $[a; b]$. Alors

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx(+C)$$

Méthodes pour déterminer une primitive: Par parties

Exemples

Calculons $\int x\sin(x)\,dx$. On choisit de poser $f'(x) = \sin(x)$ et $g(x) = x$, et l'on obtient $f(x) = -\cos(x)$ et $g'(x) = 1$, d'où

$$\begin{aligned}\int x\sin(x)\,dx &= -\cos(x)x - \int 1(-\cos(x))\,dx \\ &= -x\cos(x) + \int \cos(x)\,dx = -x\cos(x) + \sin(x)\end{aligned}$$

On vérifie bien que $(-x\cos(x) + \sin(x))' = x\sin(x)$.

Méthodes pour déterminer une primitive: Par parties

Remarque

- La difficulté consiste à faire le bon choix pour décider qui joue le rôle de $f'(x)$ et de $g(x)$ dans le produit, le but étant d'aboutir à un calcul de primitive plus simple.
- Il est parfois nécessaire de procéder à plusieurs intégrations par parties successives.

Par parties : exercices

- **Exercice 1** : Tenter la méthode par parties pour trouver une primitive de $x\sin(x)$, en posant cette fois-ci $g(x) = \sin(x)$ et $f'(x) = x$. Ce choix est-il plus optimal que celui de l'exemple précédent ?
- **Exercice 2** : Déterminer, en utilisant la méthode par parties, les primitives de la fonction xe^{3x}.

Rappel : La méthode par parties consiste à trouver une primitive d'un produit de deux fonctions. On choisit un facteur comme étant $g(x)$ et l'autre comme $f'(x)$. Puis appliquer la formule

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

Le choix de $f'(x)$ et $g(x)$ est crucial, car le but est de simplifier le calcul, en choisissant de sorte que $\int f(x)g'(x)\,dx$ soit simple.

Méthodes pour déterminer une primitive: Par substitution

8. L'intégration par substitution découle de la règle de la dérivée de la composée de deux fonctions. Soit G une primitive de g.

$$(G(f(x)))' = g(f(x))f'(x)$$

$$\int g(f(x))f'(x)\,dx = G(f(x)) + c$$

$$\int g(f(x))f'(x)\,dx = \int G(t)\,dt \text{ où } t = f(x)$$

On peut donc retenir la liste des substitutions à effectuer:

$$\boxed{f(x) = t, \quad f'(x)\,dx = dt}$$

Méthodes pour déterminer une primitive: Par substitution

Exemples

$\int \sin^2(x)\cos(x)\,dx$ par substitution:
On se rend compte que

$$g(x) = x^2, \quad f(x) = \sin(x), \quad f'(x) = \cos(x)$$

On substitue donc

$$\sin(x) = t, \quad \cos(x)\,dx = dt, \quad t = \sin(x)$$

$$\int \sin^2(x)\cos(x)\,dx = \int t^2\,dt = \frac{1}{3}t^3 + c = \frac{1}{3}\sin^3(x) + c$$

Par substitution : exercices

- **Exercice 1** : Trouver une primitive de $\cos(e^x)e^x$.
- **Exercice 2** : Trouver toutes les primitives de $\frac{\cos(x)}{\sin(x)+2}$.

Rappel : La méthode par subsitution consiste à trouver une primitive d'une fonction de la forme $g(f(x))f'(x)$. Il s'agit de la règle de la chaîne, mais dans l'autre sens. Il faut donc :

- Identifier qui est $g(x)$, $f(x)$ et $f'(x)$.
- Puis, poser $f(x) = t$ et ainsi $f'(x)dx = dt$. On se retrouve donc à chercher une primitive de $g(t)$.
- Finalement, on remplace tous les t par $f(x)$ et le tour est joué.

1 Introduction

2 Méthodes pour le calcul de primitive

3 Interprétation géométrique

4 Exercices

5 Questionnaires

Interprétation géométrique

Soient la courbe C d'équation $y = f(x)$, où $f(x) \geq 0$ pour tout x, et x_0 une constante fixée. Alors, l'aire $A(x)$ délimitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites verticales passant par x_0 et x est une fonction de paramètre x qui est une primitive de $f(x)$, c'est-à-dire $A'(x) = f(x)$

Exemple de l'interprétation géométrique

Considérons la fonction $f(x) = 2x$ sur $\mathbb{R}_+$. Soit $x_0 = 0$. Dans cet exemple, la fonction A est donnée par $A(x) = x^2$. On remarque ainsi bien que $A'(x) = f(x)$ sur $\mathbb{R}_+$.

1 Introduction

2 Méthodes pour le calcul de primitive

3 Interprétation géométrique

4 Exercices

5 Questionnaires

Exercices

Exercice : Trouver les primitives suivantes.

1. $\int \ln(x)\,dx$
2. $\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$
3. $\int x^2\,e^{x^3}\,dx$
4. $\int e^x\cos(x)\,dx$

1. Introduction
2. Méthodes pour le calcul de primitive
3. Interprétation géométrique
4. Exercices
5. Questionnaires

Sondage Wooclap

1 **Allez sur wooclap.com**

2 **Entrez le code d'événement dans le bandeau supérieur**

Code d'événement
LQAYQY

Évaluation de la séance