Correction – Étude de fonction

Programme CAFE-S

Section de mathématiques, Université de Genève

Jeudi 14 septembre 2023

Exercice 1. Faire l'étude de la fonction $f(x) = \frac{e^x}{x-\pi}$.

Correction 1. Une étude de fonction comporte plusieurs étapes.

1) Tout d'abord, lorsqu'on étudie une fonction, on cherche son **domaine de définition**. Ici, nous avons une fonction comprenant une fraction. Au numérateur, e^x est définie sur $\mathbb{R}$, tout comme $x - \pi$. Toutefois, rappelons-nous que diviser par 0 est interdit. C'est pourquoi, π doit être retiré du domaine de définition, car sinon le dénominateur s'annulerait. Ainsi

$$\mathcal{D}_f = (-\infty, \pi) \cup (\pi, +\infty) = \mathbb{R} \setminus \{\pi\}$$

2) Ensuite, on peut regarder la fonction de plus près, et regarder sa **parité**. Cela permettrait de simplifier son étude, car une fonction paire/impaire comporte des symétries. Ici malheureusement, f n'est ni paire ni impaire car $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-x) \neq -f(x)$.

3) On peut ensuite chercher les **zéros** de la fonction, c'est-à-dire les $\alpha \in \mathcal{D}_f$ tels que $f(\alpha) = 0$. Dans notre cas, la seule façon d'annuler une fraction est d'annuler le numérateur. Or, il est bien connu que $e^x > 0$ pour tout x. Ainsi, $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}_f$ et alors f n'a aucun zéro.

4) On pourrait faire l'étude des **asymptotes**. Ici nous ne le ferons pas, toutefois nous pouvons calculer les limites au bornes du domaine de définition. Nous avons, en se rappelant que l'exponentielle "bat" les polynômes :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to \pi^-} f(x) = "\frac{e^\pi}{0^-}" = -\infty$$

$$\lim_{x \to \pi^+} f(x) = "\frac{e^\pi}{0^+}" = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Les deux limites du milieu montrent par exemple que la droite d'équation $x = \pi$ est une asymptote verticale de f. Aussi, la première limite nous dit que la droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale de f. Cela nous aidera pour remplir le tableau de variations.

5) Partons à la quête des **points critiques**. En utilisant la règle de dérivation du quotient de deux fonctions, nous obtenons

$$f'(x) = \frac{e^x(x-\pi) - e^x}{(x-\pi)^2} = \frac{e^x(x-\pi-1)}{(x-\pi)^2}$$

Noter que $\mathcal{D}_{f'} = \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{\pi\}$. Les points critiques sont, souvenez-vous, les solutions de l'équation $f'(x) = 0$. Cela donne

$$f'(x) = 0 \iff \frac{e^x(x-\pi-1)}{(x-\pi)^2} = 0 \iff e^x(x-\pi-1) = 0 \iff x = 1+\pi$$

En effet, un produit est nul si et seulement si l'un des deux facteurs est nul. L'exponentielle ne s'annulant jamais, il faut donc que $x-\pi-1$ s'annule. Ainsi $1+\pi$ est notre seul point critique.

6) Nous voilà enfin arrivés aux **variations** de f. Pour cela, il faut étudier le signe de $f'(x)$. Puisque $e^x > 0$ et $(x-\pi)^2 > 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}_{f'}$, il est clair que $f'(x)$ est du signe de $x-\pi-1$. Or

$$x-\pi-1 \begin{cases} > 0 & \text{sur } (1+\pi, +\infty) \\ = 0 & \text{si } x = 1+\pi \\ < 0 & \text{sur } (-\infty, 1+\pi) \end{cases}$$

Ainsi

$$f'(x) \begin{cases} > 0 & \text{sur } (1+\pi, +\infty) \\ = 0 & \text{si } x = 1+\pi \\ < 0 & \text{sur } (-\infty, 1+\pi) \end{cases}$$

Par conséquent, le tableau de variations est donné par :

x	$-\infty$		π		$1+\pi$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0 ↘		$-\infty$ || $+\infty$	↘	$e^{1+\pi}$	↗	$+\infty$

Ainsi, clairement $1+\pi$ est un minimum local de f.

7) Nous touchons au but, nous allons enfin pouvoir tracer la **courbe représentative** de notre fonction f :

`https://www.geogebra.org/m/af4sxkdr`.