CAFE-S | Calcul différentiel I : dérivées

Justin BLANCHARD, Charlène MICHELOT, Marie YAZIJI

Jeudi 14 septembre 2023

UNIVERSITÉ DE GENÈVE
FACULTÉ DES SCIENCES
Section de mathématiques

Sommaire

Considérons une fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et notons $\mathcal{C}_f$ le graphe de f. Prenons des points $c, d \in (a, b)$. La **pente** de la droite passant par les points $C = (c, f(c)) \in \mathcal{C}_f$ et $D = (d, f(d)) \in \mathcal{C}_f$ est calculée par

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c}$$

À la limite $d \to c$, la droite obtenue est la **tangente** au point C.

Remarque

Cette tangente est le graphe du polynôme de degré 1 qui approxime le mieux la fonction f autour de c.

`https://www.geogebra.org/m/ZFKXsSn8`

Définitions

Définition

*Le **nombre dérivé** d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ en $c \in (a, b)$ est le coefficient directeur/la pente, noté $\tau(c)$, de la tangente au point C.*

Remarque

La tangente au point C a pour équation $y = \tau(c)(x - c) + f(c)$.

Question : Comment calculer $\tau(c)$?

Calcul de $\tau(c)$

Puisque la tangente est obtenue comme une droite "limite", il semble naturel que $\tau(c)$ puisse être calculé comme une limite. Effectivement :

$$\tau(c) = \lim_{d \to c} \frac{f(d) - f(c)}{d - c}$$

Une autre façon de voir, en posant $h := d - c$:

$$\tau(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Définition

*Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dite **dérivable en un point** $c \in (a, b)$ si $\tau(c)$ existe. Elle est dite **dérivable sur** (a, b) si $\tau(c)$ existe pour tout $c \in (a, b)$.*

Définition

*La **fonction dérivée** d'une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est la fonction, notée f' ou parfois $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, définie par $f'(x) = \tau(x)$. Le domaine de définition de f' est le sous-ensemble de $\mathcal{D}_f$ donné par*

$$\mathcal{D}_{f'} = \{c \in (a, b) \mid \tau(c) \text{ existe}\} = \{c \in (a, b) \mid f \text{ est dérivable en } c\}.$$

Ainsi, la fonction dérivée d'une fonction f est simplement une fonction notée f' qui a chaque x du domaine de définition, associe la pente de la tangente au point $(x, f(x))$.

En physique

Exemple concret

D'un point de vue de physicien :

- *Si $f(x)$ représente la* ***position*** *d'un objet au temps x, alors $f'(x)$ représente la* ***vitesse*** *de l'objet au temps x.*
- *Si $g(x)$ représente la* ***vitesse*** *d'un objet au temps x, alors $g'(x)$ représente l'****accélération instantanée*** *de l'objet au temps x.*

Autrement dit, si $f(x)$ est la position au temps x, alors la fonction dérivée de sa fonction dérivée est l'accélération ! On écrit $f''(x)$, appelée ***dérivée seconde*** *de f.*

Un premier exemple

Exemple : Considérons la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ définie sur $\mathbb{R}_+$. Alors

$$\begin{aligned}
\tau(c) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{c+h}-\sqrt{c}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{c+h}-\sqrt{c}\right)\left(\sqrt{c+h}+\sqrt{c}\right)}{h\left(\sqrt{c+h}+\sqrt{c}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{c+h-c}{h\left(\sqrt{c+h}+\sqrt{c}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{c+h}+\sqrt{c}} = \frac{1}{2\sqrt{c}}
\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction dérivée de f est $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ et $\mathcal{D}_{f'} = \mathbb{R}_+^*$.

Dérivées usuelles

Dans la vraie vie, on ne calcule jamais une dérivée avec cette méthode. Il faut apprendre le tableau suivant des dérivées usuelles (où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $\beta \in \mathbb{R}$ une constante) :

$f(x)$	$f'(x)$
β	0
x	1
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
e^x	e^x
$\ln(x)$	$1/x$

Méfiez-vous toujours du domaine de définition, notamment avec ln ou $\sqrt{\cdot}$.

Propriétés

Soient f et g deux fonctions.

1. $(f+g)' = f' + g'$
   - Exemple : $(\cos(x) + x^2)' = -\sin(x) + 2x$

Propriétés

Soient f et g deux fonctions.

1. $(f+g)' = f' + g'$
   - Exemple : $(\cos(x) + x^2)' = -\sin(x) + 2x$
2. $(\alpha f)' = \alpha f'$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$
   - Exemple : $(15\sin(x))' = 15\cos(x)$

Propriétés

Soient f et g deux fonctions.

1. $(f+g)' = f' + g'$
   - Exemple : $(\cos(x) + x^2)' = -\sin(x) + 2x$
2. $(\alpha f)' = \alpha f'$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$
   - Exemple : $(15\sin(x))' = 15\cos(x)$
3. $(fg)' = f'g + fg'$
   - Exemple : $(x\cos(x))' = \cos(x) - x\sin(x)$

Propriétés

Soient f et g deux fonctions.

1. $(f+g)' = f' + g'$
   - Exemple : $(\cos(x) + x^2)' = -\sin(x) + 2x$
2. $(\alpha f)' = \alpha f'$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$
   - Exemple : $(15\sin(x))' = 15\cos(x)$
3. $(fg)' = f'g + fg'$
   - Exemple : $(x\cos(x))' = \cos(x) - x\sin(x)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
   - Exemple : $\left(\frac{e^x}{\cos(x)}\right)' = \frac{e^x\cos(x) + e^x\sin(x)}{\cos^2(x)}$

Propriétés

Soient f et g deux fonctions.

1. $(f+g)' = f' + g'$
   - Exemple : $(\cos(x) + x^2)' = -\sin(x) + 2x$
2. $(\alpha f)' = \alpha f'$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$
   - Exemple : $(15\sin(x))' = 15\cos(x)$
3. $(fg)' = f'g + fg'$
   - Exemple : $(x\cos(x))' = \cos(x) - x\sin(x)$
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
   - Exemple : $\left(\frac{e^x}{\cos(x)}\right)' = \frac{e^x\cos(x) + e^x\sin(x)}{\cos^2(x)}$
5. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \rightarrow$ Règle de la chaîne
   - Exemple : $(\ln(\sin(x)))' = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

Règle de la chaîne

Il s'agit sans doute de la règle de dérivation la plus importante. Voici deux autres exemples.

1. Pour dériver $h(x) = \cos(x^2)$, on remarque que $h = f \circ g$, où $f(x) = \cos(x)$ et $g(x) = x^2$. On a donc $f'(x) = -\sin(x)$ et $g'(x) = 2x$. Ainsi
$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) = (-\sin(x^2)) \cdot (2x) = -2x\sin(x^2)$$
2. Pour dériver $i(x) = e^{\frac{1}{x}}$ on remarque que $i = f \circ g$, où $f(x) = e^x$ et $g(x) = \frac{1}{x}$. Ainsi $f'(x) = e^x$ et $g'(x) = \frac{-1}{x^2}$. Par conséquent,
$$i'(x) = f'(g(x))g'(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{-1}{x^2}\right) = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

Exercices

Exercice 1 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \ln(x) + 5\sin(x)$
2. $g(x) = e^x(x^2 - 4x + \pi)$
3. $h(x) = \cos(x)^2$
4. $i(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^3 - \ln(x)}$

Exercice 2 : Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 0, où $f(x) = \ln(\cos(4^x))$.

Exercice 3 : La fonction $f(x) = \frac{\sin(x)}{\pi + |x|}$ est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 4 : Calculer $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x}$ à l'aide des dérivées.

Dérivabilité implique continuité

Proposition

Si une fonction est dérivable en c, alors elle est continue en c.

Remarque

- *La réciproque est fausse ! La fonction $f(x) = |x|$ est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.*
- *La contraposée nous dit que si f n'est pas continue en c, alors f n'est pas dérivable en c.*

Signe de la dérivée et variations de f

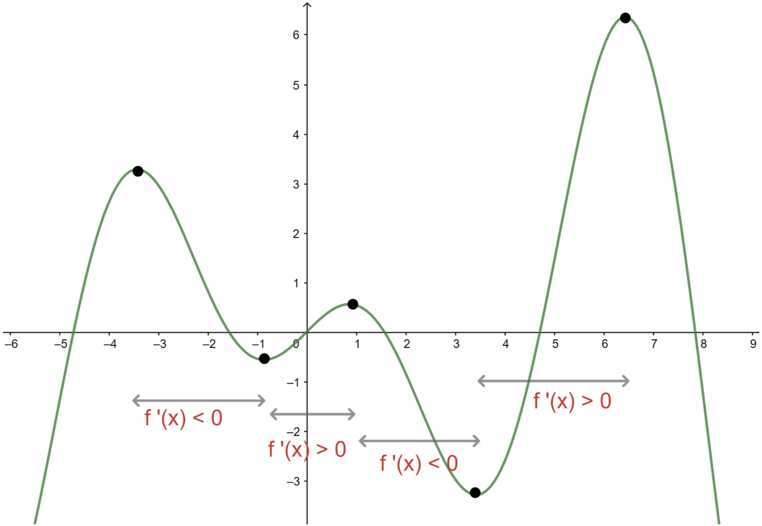
La fonction dérivée en dit long sur les **variations** de la fonction f.

Proposition

Soient $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et $I \subset \mathcal{D}_{f'}$. Si $f'(c) \geq 0$ (resp. $f'(c) \leq 0$) pour tout $c \in I$, alors f est croissante (resp. décroissante) sur I. Si $f'(c) = 0$ pour tout $c \in I$, alors f est constante sur I.

Remarque

C'est assez parlant du point de vue de physique. Lorsque l'accélération est positive, la vitesse croit. Lorsqu'elle est négative, la vitesse diminue. Lorsqu'elle est nulle, la vitesse est constante.


f '(x) < 0
f '(x) > 0
f '(x) < 0
f '(x) > 0

Points critiques et extrema

Définition

- *Un point $c \in \mathcal{D}_{f'}$ tel que $f'(c) = 0$ est appelé* ***point critique de*** *f.*
- *Un point $c \in \mathcal{D}_f$ tel qu'il existe $\varepsilon > 0$ satisfaisant $f(x) \leq f(c)$ (resp. $f(x) \geq f(c)$) pour tout $x \in [c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ est dit* ***maximum local de*** *f (resp.* ***minimum local de*** *f).*
- *Un* ***extremum local*** *est un maximum local ou un minimum local.*

Proposition

Si c est un extremum local de f, alors c est un point critique de f.

Points critiques et extrema (suite)

Remarque

Encore une fois, la réciproque est fausse. Parfois, un point critique n'est pas un extremum local : on parle de point de selle. L'exemple célèbre est le point 0 *pour la fonction* $f(x) = x^3$*. En effet,* $f'(0) = 0$*, toutefois* 0 *n'est pas un extremum car* $f'(x) > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$*.*

Ainsi, lorsqu'on cherche les extrema d'une fonction, on commence par chercher les points critiques. Puis, en évaluant au voisinage de chaque point critique, on finit par savoir qui sont les extrema. On peut également dessiner le tableau de signes de la fonction dérivée, et en déduire le tableau de variations de f, ce qui aide à trouver les extrema.

Exercices

Exercice 1 : Faire l'étude de la fonction $f(x) = \frac{e^x}{x-\pi}$, c'est-à-dire : donner le domaine de définition de f, les zéros de f, la dérivée et les points critiques de f et le tableau des variations de f. Ensuite, en esquisser la courbe représentative.

Exercice 2 : Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \sin\left(e^{x^4}\right)$
2. $f(x) = \frac{\sqrt{\ln(x)}}{x^3}$
3. $f(x) = \log_a(3x+2)$ où $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, sachant que $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.
4. $f(x) = \tan\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)$

QR Code - évaluation de votre compréhension

https://app.wooclap.com/QGSOYR?from=instruction-slide

QR Code – évaluation de la séance