Preuves par récurrence

13 septembre 2023

Exercice 1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer par récurrence que la somme des premiers n entiers est égale à $\frac{n(n+1)}{2}$, i.e. $\mathscr{P}(n)$: "$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \geq 1$".*

Démonstration. **Pas initial :** $\mathscr{P}(1) = 1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2}$.

Pas de récurrence : Fixons $n \geq 1$. Supposons maintenant que $\mathscr{P}(n)$ est vraie, et montrons donc que $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée également. Nous avons

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(n+1) : 1+2+...+(n+1)\underbrace{1+2+...+n}_{\frac{n(n+1)}{2}}+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) \\ &= \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}\end{aligned} \tag{1}$$

Et donc, par principe de récurrence, nous avons montré que $\mathscr{P}(n)$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ □

Exercice 2. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer par récurrence que $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.*

Démonstration. Notons $\mathscr{P}(n)$ l'assertion $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Pas initial : On a bien $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ i.e. $\mathscr{P}(1)$ est vraie.

Pas de récurrence : Soit $n \geq 1$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons donc que $\mathscr{P}(n+1)$ est vérifiée également :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} \underbrace{=}_{\mathscr{P}(n)} \frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n+1}{n+2}\end{aligned} \tag{2}$$

Et donc, par principe de récurrence, nous montré que $\mathscr{P}(n)$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$. $\square$

Exercice 3. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer par récurrence que $1 + 2n \leq 3^n$.*

Démonstration. **Pas initial :** On a bien $1 + 2 \cdot 0 = 1 = 3^0$ i.e. $\mathscr{P}(0)$ est vraie.

Pas de récurrence : Soit $n \geq 0$. Supposons maintenant que $\mathscr{P}(n) : 1 + 2n \leq 3^n$ est vraie, et montrons donc que $\mathscr{P}(n+1) : 1 + 2(n+1) \leq 3^{n+1}$ est vérifiée également. On a

$$1 + 2(n+1) = 2n + 3 \leq 6n + 3 = 3(2n+1) \underbrace{\leq}_{\mathscr{P}(n)} 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}. \tag{3}$$

Et donc, par principe de récurrence, nous avons montré que $\mathscr{P}(n) : 1 + 2n \leq 3^n$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$. $\square$

Exercice 4. *Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 4$. Montrer par récurrence que $2^n \leq n!$.*

Démonstration. Notons $\mathscr{P}(n)$ l'assertion $2^n \leq n!$.

Pas initial : $\mathscr{P}(4)$ est vraie puisque $2^4 = 16 \leq 24 = 4!$.

Pas de récurrence : Soit $n \geq 4$ et supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. On a alors

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2 \cdot 2^n \\ &\underbrace{\geq}_{\mathscr{P}(n)} 2 \cdot n! \\ &\geq (n+1)n! \\ &= (n+1)! \end{aligned} \tag{4}$$

Et donc, par principe de récurrence, nous avons montré que $\mathscr{P}(n) : 2^n \leq n!$ est vérifiée pour tout $n \geq 4$. $\square$

Exercice 5 (Inégalité de Bernoulli)**.** *Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$ tel que $x > -1$. Montrer par récurrence que*

$$(1+x)^n \geq 1 + nx. \tag{5}$$

Démonstration. Soit $x > -1$. Notons $\mathscr{P}(n)$ l'assertion $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

Pas initial : $\mathscr{P}(1)$ est vraie puisque $(1+x)^1 = 1 + x = 1 + 1 \cdot x$.

Pas de récurrence : Soit $n \geq 1$ et supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. On a alors

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\underbrace{\geq}_{\mathscr{P}(n)} (1+x)(1+nx) = 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n+1)x. \end{aligned} \tag{6}$$

Et donc, par principe de récurrence, nous avons montré que $\mathscr{P}(n) : (1+x)^n \geq 1 + nx$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. $\square$

Exercice 6 (Nombres de Fermat)**.** *On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, le nombre de Fermat $F_n := 2^{2^n} + 1$. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$*

$$F_n = 2 + F_0 F_1 \cdots F_{n-1}. \tag{7}$$

Démonstration. Notons $\mathscr{P}(n)$ l'assertion $F_n = 2 + F_0 F_1 \cdots F_{n-1}$.

Pas initial : $\mathscr{P}(1)$ est vraie puisque $F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5 = 2 + 3 = 2 + F_0$.

Pas de récurrence : Soit $n \geq 1$ et supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. On a alors

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= 2^{2^{n+1}} + 1 \\ &= \left(2^{2^n}\right)^2 + 1 \\ &= (F_n - 1)^2 + 1 \\ &= {\color{red}2} + (F_n - 1)^2 + 1 {\color{red}-2} \\ &= 2 + (F_n - 1)^2 - 1 \\ &= 2 + F_n^2 - 2F_n + 1 - 1 \\ &= 2 + F_n(F_n - 2) \\ &\underbrace{=}_{\mathscr{P}(n)} 2 + F_n(2 + F_0 F_1 \cdots F_{n-1} - 2) \\ &= 2 + F_0 F_1 \cdots F_{n-1} F_n \end{aligned} \tag{8}$$

Et donc, par principe de récurrence, nous avons montré que $\mathscr{P}(n) : F_n = 2 + F_0 F_1 \cdots F_{n-1}$ est vérifiée pour tout $n \geq 1$. $\square$