Mardi Matin- Cours

mardi, 12 septembre 2023 08:18

Logique et ensemble...

Logique et ensembles

Programme CAFE-S

Université de Genève

Septembre 2023

Lien vers OMB+

Définition (Assertion mathématique)

Une *assertion mathématique* est un énoncé syntaxiquement correct pouvant être vrai (V) ou faux (F) sans ambiguïté.

Définition (Assertion mathématique)

Une *assertion mathématique* est un énoncé syntaxiquement correct pouvant être vrai (V) ou faux (F) sans ambiguïté.

Exemples

- Tous les nombres entiers sont pairs.

Définition (Assertion mathématique)

Une *assertion mathématique* est un énoncé syntaxiquement correct pouvant être vrai (V) ou faux (F) sans ambiguïté.

Exemples

- Tous les nombres entiers sont pairs. (F)

Définition (Assertion mathématique)

Une *assertion mathématique* est un énoncé syntaxiquement correct pouvant être vrai (V) ou faux (F) sans ambiguïté.

Exemples

- Tous les nombres entiers sont pairs. (F)
- Si x est un nombre réel strictement négatif, alors $-x$ est strictement positif.

Définition (Assertion mathématique)

Une *assertion mathématique* est un énoncé syntaxiquement correct pouvant être vrai (V) ou faux (F) sans ambiguïté.

Exemples

- Tous les nombres entiers sont pairs. (F)
- Si x est un nombre réel strictement négatif, alors $-x$ est strictement positif. (V)

Définition (Assertion mathématique)

Une *assertion mathématique* est un énoncé syntaxiquement correct pouvant être vrai (V) ou faux (F) sans ambiguïté.

Exemples

- Tous les nombres entiers sont pairs. (F)
- Si x est un nombre réel strictement négatif, alors $-x$ est strictement positif. (V)
- Roger Federer est le plus grand joueur de tennis de tous les temps.

Définition (Assertion mathématique)

Une *assertion mathématique* est un énoncé syntaxiquement correct pouvant être vrai (V) ou faux (F) sans ambiguïté.

Exemples

- Tous les nombres entiers sont pairs. (F)
- Si x est un nombre réel strictement négatif, alors $-x$ est strictement positif. (V)
- Roger Federer est le plus grand joueur de tennis de tous les temps. (Pas une assertion !)

Définition (Négation)

La négation d'une assertion mathématique P est une assertion vrai quand P est fausse, et inversement. La négation de P est notée $\neg P$

Définition (Négation)

La négation d'une assertion mathématique P est une assertion vrai quand P est fausse, et inversement. La négation de P est notée $\neg P$

Exemples

- $\neg$ (x est un nombre premier)

Définition (Négation)

La négation d'une assertion mathématique P est une assertion vrai quand P est fausse, et inversement. La négation de P est notée $\neg P$

Exemples

- $\neg$ (x est un nombre premier) $\iff$ x est un nombre composé

Définition (Négation)

La négation d'une assertion mathématique P est une assertion vrai quand P est fausse, et inversement. La négation de P est notée $\neg P$

Exemples

- $\neg$ (x est un nombre premier) $\iff$ x est un nombre composé
- $\neg$ (Tous les nombres entiers sont paires)

? Tous les nombres entiers sont impaires
2. Il existe un nombre entier pair
3. Pas tous les nombres entiers sont paires
$\iff$ Il existe un nombre entier impair

Définition (Négation)

La négation d'une assertion mathématique P est une assertion vrai quand P est fausse, et inversement. La négation de P est notée $\neg P$

Exemples

- $\neg$ (x est un nombre premier) $\iff$ x est un nombre composé
- $\neg$ (Tous les nombres entiers sont paires) $\iff$ Il existe des nombres entiers impaires

L'implication

Le symbole mathématique "$\Rightarrow$" se traduit en français par :

Si *condition(s)*, **alors** *conséquence(s)*

Ex : x est divisible par 4, alors il est divisible par 3 (F)

$4 | x \Rightarrow 3 | x$

L'implication

Exemples

- être mathématicien-ne (A) $\implies$ être humain (B)
- Il pleut (A) $\implies$ La route est mouillée. (B)

La réciproque

$A \Rightarrow B$

$B \Rightarrow A$

Définition (réciproque)

La réciproque de "$A \implies B$" est "$B \implies A$".

Exemples

- La réciproque de "Si f est une fonction dérivable, alors f est continue" est "Si f est continue, donc f est dérivable"

F

$x \mapsto |x|$

L'équivalence

Définition (équivalence)

On dit que deux assertions A et B sont équivalentes, noté $A \iff B$ si $A \Rightarrow B$ **et** $B \Rightarrow A$.

"$\iff$" se traduit en fraçais par "si et seulement si", abrégé "ssi".

L'équivalence

Exemples

- $\sqrt[3]{x} = y \iff x = y^3$

L'équivalence

Exemples

- $\sqrt[3]{x} = y \iff x = y^3$
- Tous les nombres entiers positifs différents de 1 ne sont pas premiers $\iff$ Il existe au moins un nombre entier positif qui a un autre diviseur que 1 et lui-même.

$(2,3,4)$ triplet

$(3,2,4)$

$(3,3,3)$

$\{2,3,4\} = \{3,2,4\}$

$= \{2,2,2,3,4,4\}$

Ensembles

Définition (Ensemble)

Un *ensemble* est une collection non-ordonnée d'objets distincts.

- On appelle un objet x contenu dans un ensemble E un *élément*, et on écrit "$x \in E$" pour x est un élément de E
- Nous appelons l'ensemble qui ne contient aucun élément *l'ensemble vide*, noté $\emptyset = \{\}$

Exemples

- $E = \{a, a, b, b, c\} = \{a, b, c\} = \{b, a, c\}$
  $a \in E$, mais $d \notin E$
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$, $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2 \dots\}$, $\mathbb{R}$

$\mathbb{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{N}, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \}$

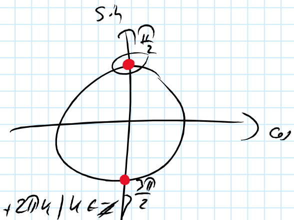
Création d'ensembles

Lors que l'on doit décrire un ensemble, nous pouvons

1. Énumérer tous les éléments de l'ensemble entre "{}"
2. Donner une règle qui permet de trouver comment construire les éléments de l'ensemble

Exemples

- "ensemble des nombres naturels plus petits ou égaux à 3" $= \{0, 1, 2, 3\} = \{x \text{ naturel} : x \leq 3\}$
- "les solutions réelles de l'équation $\cos(x) = 0$" $=$ $\{\ldots, \cancel{-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots\} = \{k\pi : k \in \mathbb{Z}}\}$



$\left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

" $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$

Quantificateurs

Soit E un ensemble. Nous abrégeons souvent :

- "tel que" par tq, : ou | tel que leur division par 2 est entière
  - "L'ensemble des nombres naturels ~~divisibles par 2~~" $\iff$ $\{x \in \mathbb{N} : x \text{ est pair}\}$
  - "L'ensemble des nombres réels négatifs" $\iff$ $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$

$\frac{x}{\pi} = k$

Les nombres réels multiples de π $= \{x \in \mathbb{R} : x = k\pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}\}$

$= \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

Logique | Théorie des ensembles | Preuves par récurrence | Feedback

Quantificateurs

Soit E un ensemble. Nous abrégeons souvent :

- "tel que" par tq, : ou |
  - "L'ensemble des nombres naturels divisibles par 2" $\iff$ $\{x \in \mathbb{N} : x \text{ est pair}\}$
  - "L'ensemble des nombres réels négatifs" $\iff$ $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$
- "il existe" par $\exists$:
  - "Il existe un nombre naturel plus petit que 2" $\iff$ $\exists x \in \mathbb{N}, x \leq 2$

Logique | Théorie des ensembles | Preuves par récurrence | Feedback

Quantificateurs

Soit E un ensemble. Nous abrégeons souvent :

- "tel que" par tq, : ou |
  - "L'ensemble des nombres naturels divisibles par 2" $\iff$ $\{x \in \mathbb{N} : x \text{ est pair}\}$
  - "L'ensemble des nombres réels négatifs" $\iff$ $\{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}$
- "il existe" par $\exists$:
  - "Il existe un nombre naturel plus petit que 2" $\iff$ $\exists x \in \mathbb{N}, x \leq 2$
- "pour tout" par $\forall$:
  - "Tout nombre entier est divisible par 3" $\iff$ $\forall x \in \mathbb{Z}, x/3 \in \mathbb{Z}$

$\neg(3 \mid x)$

$\neg(\forall x \in \mathbb{N}, 3 \mid x)$

$\iff \exists x \in \mathbb{N}, 3 \nmid x$

$\iff \exists x \in \mathbb{N}$ tq $3 \nmid x$

Négation des quantificateurs

Pour E un ensemble et $A(x)$ une assertion qui dépend des éléments x de E, on a:

- $\neg(\forall x \in E, A(x)) \iff (\exists x \in E, \neg A(x))$
- $\neg(\exists x \in E, A(x)) \iff (\forall x \in E, \neg A(x))$

Exemples

- $\neg(\exists x \in \mathbb{N}, x \leq 2) \iff ?$ $\forall x \in \mathbb{N}, x > 2$
- $\neg(\forall x \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{N}) \iff ?$ $\exists x \in \mathbb{Z}, x \notin \mathbb{N}$

$\neg(x \leq 2)$

Négation des quantificateurs

Pour E un ensemble et $A(x)$ une assertion qui dépend des éléments x de E, on a:

- $\neg(\forall x \in E, A(x)) \iff (\exists x \in E, \neg A(x))$
- $\neg(\exists x \in E, A(x)) \iff (\forall x \in E, \neg A(x))$

Exemples

- $\neg(\exists x \in \mathbb{N} : x \leq 2) \iff \forall x \in \mathbb{N} : x > 2$
- $\neg(\forall x \in \mathbb{Z} : x \in \mathbb{N}) \iff ?$

Négation des quantificateurs

Pour E un ensemble et $A(x)$ une assertion qui dépend des éléments x de E, on a:

- $\neg(\forall x \in E, A(x)) \iff (\exists x \in E, \neg A(x))$
- $\neg(\exists x \in E, A(x)) \iff (\forall x \in E, \neg A(x))$

Exemples

- $\neg(\exists x \in \mathbb{N} : x \leq 2) \iff \forall x \in \mathbb{N} : x > 2$
- $\neg(\forall x \in \mathbb{Z} : x \in \mathbb{N}) \iff \exists x \in \mathbb{Z} : x \notin \mathbb{N}$

Exercice 1

10h25

a. Traduire les énoncés suivants en français
   - $\{x \in \mathbb{Q} : x < 3\}$
   - $\{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$
   - $\{u \in \mathbb{R} : f(u) = 0\}$
   - $\{x \in \mathbb{R} : \exists u \in \mathbb{N}$ tel que $x = 5 \cdot u\}$
b. Traduire les énoncés suivants en écriture mathématique
   - L'ensemble des entiers compris entre 3 et π
   - Les solutions de l'équation $\cos(x^2) = 0.5$
   - Les diviseurs communs de 5 et 6
   - Tous les points du plan ($= \mathbb{R}^2$) qui appartiennent au cercle C_0 et au cercle C_1

Sous-ensembles

Définition (Inclusion)

Soient A et B deux ensembles. A est *inclus* dans B, noté $A \subset B$, si $x \in A \implies x \in B$. On dit que A est un *sous-ensemble* de B.

Exemples

- $\{chat, poisson\} \subset \{poisson, chien, chat\}$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- $[0,1] \not\subset \mathbb{N}$

Les intervalles dans $\mathbb{R}$

Définition

Un *intervalle* est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ comprenant tous les éléments délimités par deux nombres réels, la borne inférieur a et la supérieure b, noté :

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ est dit un intervalle fermé
- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$ est dit un intervalle ouvert.
- $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}$ est dit semi-fermé à gauche et semi-ouvert à droite.
- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$ est dit semi-ouvert à gauche et semi-fermé à droite.

( ) =] [

Les intervalles dans $\mathbb{R}$

Définition

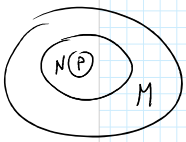
On généralise cette notation aux ensembles de réels inférieurs ou supérieurs à une valeur a :

- $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x \geq a\}$ les réels plus grands que a
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} | x > a\}$ les réels strictement plus grands que a
- $(\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} | x \leq a\}$ les réels plus petits que a
- $(\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} | x < a\}$ les réels strictement plus petits que a

Théorème

Soient M, N et P trois ensembles. Alors on a:

- $M \subset M$
- $M = N \iff M \subset N$ et $N \subset M$
- $P \subset N$ et $N \subset M \implies P \subset M$



$\Rightarrow P \subset M.$

Opérations sur les ensembles

Soient A et B deux ensembles. On définit et on note:

- la *réunion* de A et B par $A \cup B = \{x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- l'*intersection* de A et B par $A \cap B = \{x \in A \text{ et } x \in B\}$, i.e. les éléments de A qui sont aussi dans B
- la *différence ensembliste* de A et B par $A \backslash B = \{x \in A : x \notin B\}$, i.e. les éléments de A qui ne sont pas dans B. Dans le cas où B est un sous-ensemble de A, la différence ensembliste $A \backslash B$ est aussi appelée le *complémentaire* de B dans A, noté $C_A(B)$

Exemples

- $\mathbb{N} \cup \{..., -2, -1, 0\} = \mathbb{Z}$
- $\mathbb{N} \backslash \mathbb{Q} = \emptyset$ car $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$
- $\underbrace{((-\infty, 0] \cap \mathbb{Z})}_{\{\dots;-3;-2;-1;0\}} \cup \mathbb{N} = \mathbb{Z}$

L'ensemble des parties

Soit E un ensemble. *L'ensemble des parties* de E est l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de E, qu'on note $\mathcal{P}(E)$.

Exemples

Pour
$E = \{a, b, c\}, \mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$

$\{a, b, c\} = A$

les sous-ensembles de A = ?

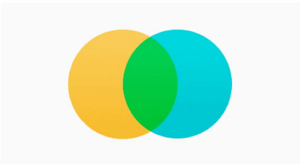
$\emptyset$ $\{a\}$ $\{b\}$ $\{c\}$ $\{a;c\}$ $\{a;b\}$ $\{b;c\}$ $\{a,b,c\}$

$\{\emptyset; \{a\}; \ldots \{a,c\}; \ldots \{b;c\}, A\}.$

$= \mathcal{P}(A).$

Diagrammes ensemblistes

On peut illustrer ceci à l'aide de diagrammes:



Applications à l'étude de fonctions

Définition

Soient A et B deux ensembles et $f : A \to B$ une fonction.

1. A est appelé le *domaine de définition*, noté D_f
2. L'*image de* f est l'ensemble $Im(f) = f(A) = \{y \in B : \exists x \in A \text{ tel que } f(x) = y\}$

Application à l'étude de fonctions

Exemples (Domaine d'une somme)

Considérons la fonctions $f : A \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{x}$. Essayons de trouver le domaine de définition maximal de f dans les réels.

Application à l'étude de fonctions

Exemples (Domaine d'une somme)

Nous remarquons que $x \mapsto \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ est définie en $x \in \mathbb{R}$ si et seulement si $f_1 : x \mapsto \sqrt{x}$ et $f_2 : x \mapsto \frac{1}{x}$ le sont aussi.
Donc $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}^* =]0, \infty[= \mathbb{R}_{>0}$.

Application à l'étude de fonctions

Remarque

Cela va de même si $f = f_1 - f_2$ et $f = f_1 * f_2$. Dans le cas $f = \frac{f_1}{f_2}$, $D_f = D_{f_1} \cap D_{f_2} \setminus \{x \in \mathbb{R} : f_2(x) = 0\}$

Applications à l'étude de fonctions

Exemples (Composition de fonctions)

Considérons la fonction $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{\cos(x)}$. Essayons de trouver le domaine de définition de cette fonction.

Applications à l'étude de fonctions

Exemples (Composition de fonctions)

Nous savons que $D_{\sqrt{\cdot}} = \mathbb{R}_{\geq 0}$. Nous avons alors que $x \in D_f$ si et seulement si $\cos(x) \in D_{\sqrt{\cdot}}$. Cela est équivalent à demander que $\cos(x) \geq 0$. En regardant le cercle trigonométrique, on peut se convaincre que $\cos$ est positif pour les angles compris entre $-\pi/2$ et $\pi/2$, donc $D_f = \{x \in [-\pi, \pi] : \cos(x) \geq 0\} = [-\pi/2, \pi/2]$

Exercice 1

Considérons les sous-ensembles de $\mathbb{N}$: $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{1, 3, 5, 7\}$, $C = \{2, 4, 6\}$, $D = \{3, 6\}$

1. Déterminer $B \cap D$ et $C \cap D$.
2. Déterminer $B \cup D$ et $C \cup D$.
3. Déterminer $((B \cap C) \cup (A \setminus B)) \setminus C$
4. Déterminer les complémentaires dans A de B, C et D.

" dans A de B = $A \setminus B$

Résolution ex1

1. $B \cap D = \{3\}$ et $C \cap D = \{6\}$
2. $B \cup D = \{1, 3, 5, 6, 7\}$ et $C \cup D = \{2, 3, 4, 6\}$
3. $((B \cap C) \cup (A \setminus B)) \setminus C = \emptyset$
4. $C_A(B) = \{2, 4, 6\}$, $C_A(C) = \{1, 3, 5, 7\}$ et $C_A(D) = \{1, 2, 4, 5, 7\}$

Exercice 2

Compléter les assertions suivantes avec les symboles $\in, \ni, \subset$ et $\supset$ pour qu'elles soient vraies.

1. $\mathbb{N}$ ... $\mathbb{Z}$
2. $\mathbb{R}$ ... $\mathbb{Q}$
3. $\{2\}$ ... $\mathbb{N}$
4. 2 ... $\mathbb{N}$
5. $\emptyset$ ... $\{1,2,3\}$
6. $\{1,2\}$ ... $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$
7. $\mathcal{P}(\{1,2,3\})$ ... $\{\{1\}\}$

Résolution ex2

1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
2. $\mathbb{R} \supset \mathbb{Q}$
3. $\{2\} \subset \mathbb{N}$
4. $2 \in \mathbb{N}$
5. $\emptyset \subset \{1,2,3\}$
6. $\{1,2\} \in \mathcal{P}(\{1,2,3\})$
7. $\mathcal{P}(\{1,2,3\}) \supset \{\{1\}\}$

Exercice 3

,, (0,1)

Déterminer, dans $]0,1]$, $\mathbb{N}$ puis dans $\mathbb{R}$, le domaine de définition maximum des fonctions suivantes :

1. $f : x \mapsto (4x^2 + 5/x)/(x^2 - 2)$
2. $f : x \mapsto \sqrt{5/(1-x)}$

Résolution ex3

1. $Df_{[0,1]} =]0,1], Df_{\mathbb{N}} = \mathbb{N}\backslash\{0\}$ et $Df_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\backslash\{-\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}\}$
2. $Df_{[0,1]} =]0,1[, Df_{\mathbb{N}} = \{0\}$ et $Df_{\mathbb{R}} = \{x \in \mathbb{R} : x < 1\}$

Assertion dépendante d'un paramètre

Exemples

1. $\mathcal{P}(n) = "(x^n)' = nx^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}"$
2. $\mathcal{P}(n) = "1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \geq 1, n \in \mathbb{N}"$
3. $\mathcal{P}(n) = x^n$ est croissante pour tout $n > 0, n \in \mathbb{N}"$

Comment prouver ce genre d'assertions pour tout n ?

Principe de l'induction mathématiques

Considérons une assertion mathématique $\mathcal{P} : \mathbb{N} \to \{V, F\}$ dépendant de n. Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\mathcal{P}(k)$ est vraie
2. Pour tout $n > k$, $"P(n-1) \implies \mathcal{P}(n)"$ est vraie

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq k$.

Une preuve par récurrence se construit donc en deux étapes :

- Le *pas initial* : nous prouvons que l'assertion est vraie pour un certain entier k
- Le *pas de récurrence* : nous supposons que $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq k$ et montrons que, dans ce cas, $P(n+1)$ est aussi vraie

$P(n)$ $\forall n \geq k$.

① $p(k)$ ✓
② $\forall n > k$, $p(n-1) \Rightarrow p(n)$
$\forall n \geq k$, $p(n)$ ✓

k $k+1$ $k+2$ . . . .
✓ ✓ ✓
① ②

Principe de l'induction mathématiques

Prouvons par récurrence (et avec quelques propriétés des dérivées), que

$$\mathcal{P}(n) : "(x^n)' = nx^{n-1}"$$

Pas initial : $P(1) = "x' = 1"$ Soit $f : x \mapsto x$. Par la définition de la dérivée de f en x

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = 1 = 1x^0$$

Pas de récurrence Supposons donc que $P(n)$ est vraie. Nous avons alors $(x^n)' = nx^{n-1}$. Montrons donc que $P(n+1)$ est vraie également en utilisant la propriété des dérivées d'un produit :

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + (x^n) \cdot x' = nx^{n\cancel{-1}} + x^n = (n+1)x^n$$

$\Rightarrow P(n)$ est vrai $\forall n \geq 1$.

Exercice

Soit n un entier naturel. Montrer par récurrence que:

1. la somme des premiers n entiers est égale $\frac{n(n+1)}{2}$, i.e.
   $\mathcal{P}(n) = "1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \geq 1"$.
2. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{n}{n+1}$, si $n \geq 1$.
3. $1 + 2n \leq 3^n$, si $n \geq 0$.
4. $2^n \leq n!$, si $n \geq 4$.
5. pour tout réel $x > -1$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$, si $n \geq 1$ (inégalité de Bernoulli).
6. $F_n = 2 + F_0F_1 \cdots F_{n-1}$, si $n \geq 1$, où $F_n = 2^{2^n} + 1$ est le n-ième nombre de Fermat.

Les exercices 1-2-3 seront corrigés.

Logique | Théorie des ensembles | Preuves par récurrence | Feedback

Principe de l'induction mathématiques

Considérons une assertion mathématique $\mathcal{P} : \mathbb{N} \to \{V, F\}$ dépendant de n. Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

1. $\mathcal{P}(k)$ est vraie
2. Pour tout $n > k$, $"P(n-1) \implies \mathcal{P}(n)"$ est vraie

alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq k$.

Une preuve par récurrence se construit donc en deux étapes :

- Le *pas initial* : nous prouvons que l'assertion est vraie pour un certain entier k
- Le *pas de récurrence* : nous supposons que $P(n)$ est vrai pour tout $n \geq k$ et montrons que, dans ce cas, $P(n+1)$ est aussi vraie

Université de Genève
Logique et ensembles 51 /

Logique | Théorie des ensembles | Preuves par récurrence | Feedback

Principe de l'induction mathématiques

Prouvons par récurrence (et avec quelques propriétés des dérivées), que

$$\mathcal{P}(n) : "(x^n)' = nx^{n-1}"$$

Pas initial : $P(1) = "x' = 1"$ Soit $f : x \mapsto x$. Par la définition de la dérivée de f en x

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h} = 1 = 1x^0$$

Pas de récurrence Supposons donc que $P(n)$ est vraie. Nous avons alors $(x^n)' = nx^{n-1}$. Montrons donc que $P(n+1)$ est vraie également en utilisant la propriété des dérivées d'un produit :

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$(x^{n+1})' = (x^n \cdot x)' = (x^n)' \cdot x + (x^n) \cdot x' = nx^{n-1} + x^n = (n+1)x^n$$

Université de Genève
Logique et ensembles 52 / 59

1. la somme des premiers n entiers est égale $\frac{n(n+1)}{2}$, i.e.
   $\mathcal{P}(n) = "1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \geq 1"$.

1. ① $P(1) = "1 = \frac{1(1+1)}{2}" = 1$ ✓

supposons vrai

$"\frac{n(n+1)}{2}"$ ...

❶ la somme des premiers n entiers est égale $\frac{n(n+1)}{2}$, i.e. $\mathcal{P}(n) = "1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \geq 1"$.

① Pas initial

② Induction

1.

① $P(1) = " 1 = \frac{1(1+1)}{2} " = 1$ ✓

② $P(n) = " 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} "$; $P(n$ supposons vrai

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$p(n+1) = " \underbrace{1+2+\dots+n}_{*} + n+1 = n+1 + \frac{n(n+1)}{2} "$

$= \frac{2n+2+n^2+n}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ ✓

❷ $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, si $n \geq 1$.

Pas initial : Mq $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1+1}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ok

Pas de récurrence : Supposons $" \frac{1}{1\cdot 2} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1} " = P(n)$

Montrons $P(n+1) = " \frac{1}{1\cdot 2} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+1+1)} = \frac{n+1}{n+1+1}$

$$\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}}_{\text{hyp } \frac{n}{n+1}} + \frac{1}{(n+1)(n+1+1)} = \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{(n+1)\cancel{(n+1)}}{\cancel{(n+1)}(n+2)} = \frac{(n+1)}{n+1+1}$$

Correction: $1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}, \forall n \geq 1$

Pas initial : $\mathcal{P}(1) = 1 = \frac{1\cdot(1+1)}{2}$.

Pas de récurrence : Fixons $n \geq 1$.Supposons maintenant que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, et montrons donc que $P(n+1)$ est vérifiée également. Nous avons $\mathcal{P}(n+1) = 1+2+\dots+(n+1) = \underbrace{1+2+\dots+n}_{\frac{n(n+1)}{2}} + (n+1) =$
$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1)+2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.
Et donc, par principe de récurrence, nous avons montré que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$

Correction: $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$, si $n \geq 1$

Notons $\mathcal{P}(n)$ l'assertion $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

Pas initial : On a bien $\frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$ i.e. $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Pas de récurrence : Soit $n \geq 1$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et montrons donc que $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée également:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \underbrace{=}_{\mathcal{P}(n)} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}$$
$$= \frac{n+1}{n+2}$$

Et donc, par principe de récurrence, nous montré que $\mathcal{P}(n)$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$.

Correction: $1+2n \leq 3^n$, si $n \geq 0$

Pas initial : On a bien $1+2\cdot 0 = 1 = 3^0$ i.e. $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Pas de récurrence : Soit $n \geq 0$. Supposons maintenant que $\mathcal{P}(n) : 1+2n \leq 3^n$ est vraie, et montrons donc que $\mathcal{P}(n+1) : 1+2(n+1) \leq 3^{n+1}$ est vérifiée également. On a

$$1+2(n+1) = 2n+3 \leq 6n+3 = 3(2n+1) \underbrace{\leq}_{\mathcal{P}(n)} 3\cdot 3^n = 3^{n+1}.$$

Et donc, par principe de récurrence, nous avons montré que $\mathcal{P}(n) : 1+2n \leq 3^n$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$.

Correction: inégalité de Bernoulli (si le temps le permet)

Soit $x > -1$. Notons $\mathcal{P}(n)$ l'assertion $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Pas initial : $\mathcal{P}(1)$ est vraie puisque $(1+x)^1 = 1+x = 1+1\cdot x$.

Pas de récurrence : Soit $n \geq 1$ et supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors

$$\begin{aligned}(1+x)^{n+1} &= (1+x)(1+x)^n \\ &\underbrace{\geq}_{\mathcal{P}(n)} (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \\ &\geq 1+(n+1)x.\end{aligned}$$

Et donc, par principe de récurrence, nous avons montré que $\mathcal{P}(n) : (1+x)^n \geq 1+nx$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.

Questionnaire

pour ce matin