Exercices logiques

12 septembre 2023

Exercice 1 – Les énoncés suivants sont-ils des assertions ? Si oui, pouvez-vus déterminer si elles sont vraies ou fausses ? Justifiez !

(i) Si un entier est divisible par 6, alors il est divisible par 2 et 3.
Vrai ! Soit n entier divisible par 6. Ainsi, il existe $q \in$ tel que $n = 6q = 2 \cdot 3q$.

(ii) Tous les nombres réels possèdent une racine carrée.
Faux ! Par exemple, le nombre -1 n'en possède pas.

(iii) Tous les réels non-négatifs ont une racine.
Vrai !

(iv) Tous les réels non-négatifs ont une racine irrationnelle.
Faux ! Par exemple, $\sqrt{9} = 3$, qui est rationnel.

(v) Tous les réels non-négatifs n'ont pas une racine irrationnelle.
Vrai ! Même justification que pour (iv).

(vi) Aucun réel non-négatif n'a de racine irrationnelle
Faux ! Par exemple, $\sqrt{2}$ est irrationnel, cf. vos serviteurs pour une preuve détaillée.

(vii) $\neg$(iv) $\iff$ (vi)
Faux ! La négation de (iv) est en fait (v). En français, "tous n'ont pas" n'est pas synonyme de "aucun n'a" mais plutôt de "au moins un n'a pas"

(viii) $\neg$(vi) $\Longleftrightarrow$ (v)
Vrai !

(ix) Les personnes s'exerçant plus en math ont de meilleures notes
Pas une assertion !

(x) $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$
Faux ! Pour b ou $d = 0$, l'implication de droite à gauche est fausse.

(xi) Si $b, d \neq 0$, alors $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$
Vrai ! Attention aux évidences en mathématiques...

(xii) Toutes les expressions de la forme $\sqrt[n]{x} = y$ ne sont pas équivalentes à $x = y^n$ pour n un entier positif et x, y des nombres réels quelconques.
Vrai ! Par exemple, pour $n = 2, x = 4$ et $y = -2$, l'égalité de droite est vraie mais pas celle de gauche, les expression ne sont donc pas équivalentes.

(xiii) S'il existe un nombre qui est le plus petit réel positif, alors il en existe un autre qui est le plus grand réel positif. (difficile)
Vrai ! Cet exemple montre qu'une hypothèse fasse peut amener à une conclusion fausse par un procédé logique valide. En effet, si x est le plus petit nombre réel positif, alors $\frac{1}{x}$ est le plus grand (faites une preuve).

Exercice 2 – Ecrire la négation des assertions (ii), (iii), (vi) et (xii). Sont-elles vraies ?
(ii) Tous les nombres réels n'ont pas une racine carrée. Ou aussi : Il existe au moins un nombre réel n'ayant pas de racine.Vrai !
(iii) Il existe un réel non-négatif n'ayant pas de racine. Faux !
(vi) Au moins un réel non-négatif a une racine irrationnelle. Vrai !
(xii)Toutes les expressions de la forme $\sqrt[n]{x} = y$ sont équivalentes à $x = y^n$ pour n un entier positif et x, y des nombres réels quelconques. Faux !

Exercice 3 – Ecrire la réciproque des assertions (i), (xi) et (xiii). Sont-elles vraies ?
(i)Si un nombre est divisible par 2 et 3, il est divisible par 6. Vrai !
(xi)Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$, alors $b, d \neq 0$. Vrai ! On a donc une équivalence.
(xiii)S'il existe un nombre réel positif qui est le plus grand d'entre tous, alors il en existe aussi un autre qui est le plus petit d'entre tous. Vrai ! On a là aussi une équivalence.