Définition[section]

Équations, systèmes d'équations et inéquations

Programme CAFE-S

Université de Genève

Septembre 2023

Lien vers OMB+

Définitions

Définition

Une équation est une égalité contenant des lettres, où la valeur de certaines des lettres contenues dans l'expression est inconnue. Il est habituel d'utiliser $x, y, z, u, v, ..., \lambda$ *pour des inconnues, et* $a, b, c, ..$ *pour des paramètres.*

- $2x = 3 \cdot a + b$, *où* x *est l'inconnue*

Résoudre une équation signifie trouver l'ensemble des valeurs dans un domaine par lequel on peut remplacer les inconnues afin de satisfaire l'égalité.

Exemple

Considérons $\sqrt{2x-1} = -\frac{x}{2} + 1$. Quelles sont les solutions de cette équation, pour $x \in \mathbb{R}$?
La méthode qu'on utilise est de tenter de simplifier l'expression et d'isoler l'inconnue, afin d'obtenir un expression de la forme "$x =$ ...". Pour ce faire, quel est le type d'opérations que l'on a le droit d'utiliser ?

Exemple

Tentative de résolution

$$\sqrt{2x-1} = -\frac{x}{2} + 1 \tag{1}$$

$$2x - 1 = (-\frac{x}{2} + 1)^2 = \frac{x^2}{4} - x + 1 \tag{2}$$

$$-\frac{x^2}{4} + 3x - 2 = 0 \tag{3}$$

$$x = 6 \pm 2\sqrt{7} \quad \text{, par Viète} \tag{4}$$

Nous pouvons voir que l'un des deux résultats que nous trouvons n'est pas valable, car, si $x = 6 + 2\sqrt{7}$, notre égalité est fausse, vu que $\sqrt{2x-1} \approx 0.78 \neq -4.64 \approx -\frac{x}{2} + 1$.

Fonctions bijectives

Le problème que nous avons, lorsque nous appliquons la fonction $u \mapsto u^2$, est que l'équation (2) n'est pas équivalente à (1).
Il se trouve que nous avons rajouté des solutions en tentant d'isoler x.
Il semble donc que nous devrions faire attention à quelles valeurs nous pouvons accepter comme solution, et à quelles fonctions nous appliquons de chaque côté de l'équation pour isoler x.

Domaine

Définition

Le domaine d'une équation est le sous-ensemble des valeurs pour lequel l'expression à un sens.

Exemples

- $\frac{x^2-x}{x^2-1} = 0$ n'est pas définie pour $x = \pm 1$, car nous avons une division par 0. Donc le domaine de cette équation dans $\mathbb{R}$ est $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
- $\sqrt{1-x^2} = x$ n'est pas défini pour $x > 1$ ou $x < 1$.

Bijections

Définition

Une fonction f est dite bijective s'il existe une fonction g telle que $f(x) = y \iff x = g(y)$, aussi noté $g(f(x)) = x$. g est appelée la fonction réciproque de f et on note $g = f^{-1}$

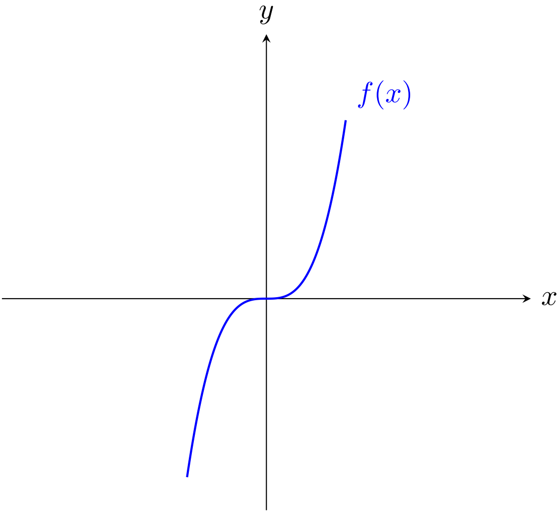
Exemples

1. $x \mapsto x^3$ est une fonction bijective, d'inverse $x \mapsto \sqrt[3]{x}$
2. $u \mapsto u^2$ n'est pas une fonction bijective, car elle n'a pas d'inverse.

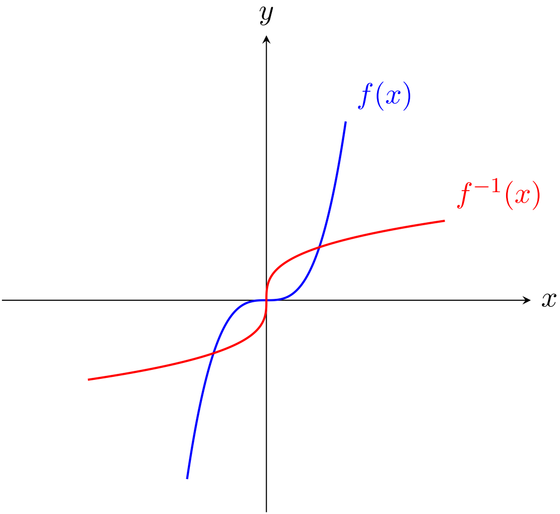
Bijections

- Pour rappel, une fonction est définie par un triplet $(x \mapsto f(x), A, B)$, où A est le domaine de définition, B le domaine d'arrivée et $x \mapsto f(x)$ la règle. "Être une fonction bijective" est une propriété qui est sensible aux changement d'une de ces trois propriétés.
- Une autre définition utile de bijectivité : une fonction $f : A \mapsto B$ est bijective $\iff$ pour tout élément y de B, il existe un seul x dans A tel que $f(x) = y$. En utilisant cette définition, il suffit de regarder le graphe d'une fonction pour juger si elle a une inverse, ou non.

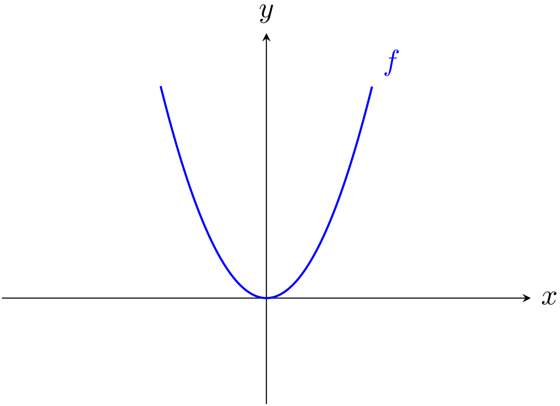
$f : x \mapsto x^3$



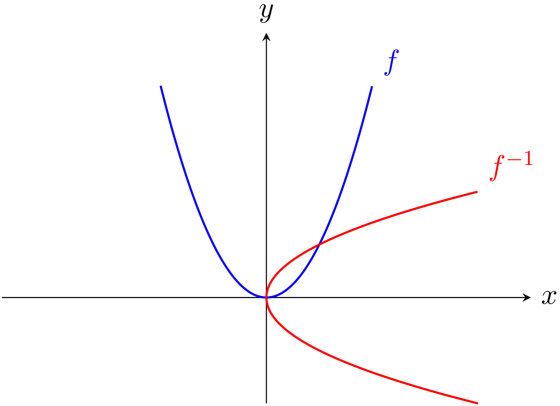
$f : x \mapsto x^3$ et réciproque



$f : x \mapsto x^2$



$f : x \mapsto x^2$ et "réciproque"



Résoudre une équation

$$2x + 1 = \frac{1}{x}$$

- Trouvons le domaine
- Résolvons l'équation pour x

Résoudre une équation

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x - 3} = 0$$

- Trouvons le domaine
- Résolvons l'équation pour x

Résoudre une équation

$$x^4 = 4x^3 + 12x^2$$

- Trouvons le domaine
- Résolvons l'équation pour x

La valeur absolue

$$
\begin{aligned}
|\cdot| : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_{\geq 0} \\
u &\mapsto |u| = \begin{cases} u & u \geq 0 \\ -u & u < 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

- $|x| = \sqrt{x^2}$
- $|x| = y \iff x = \pm y$

1. Principes de résolution d'une équation
   - Exercices
2. Inéquations
3. Le plan et l'espace
4. Systèmes d'équations
5. Notation Σ
6. Feedback

Exercice 1

Dans la suite d'équations suivants, quelle ligne n'implique pas la ligne suivante ? Soit $a \neq 0$

$$a = a \tag{1}$$

$$a^2 = a^2 \tag{2}$$

$$a^2 - a^2 = a^2 - a^2 \tag{3}$$

$$a(a - a) = (a - a)(a + a) \tag{4}$$

$$a = (a + a) \tag{5}$$

$$a = 2a \tag{6}$$

$$1 = 2 \tag{7}$$

Exercice 2

Trouver le domaine de ces équations et les résoudre :

1. $x^2 - 2x = -1$
2. $x^2 = -10$
3. $\dfrac{7x-3}{8x-5} = 2$
4. $\dfrac{\sqrt{2x-4}}{x^2-3x+2} = 0$
5. $\sqrt{x+4} = x - 2$
6. $\left|x^2 - 9\right| = 5$

Inéquations

Définition

Une inéquation est une inégalité (stricte $>$ / $<$ ou non $\geq$ / $\leq$) contenant des lettres, où certaines d'entre elles sont des inconnues.

Exemples

- $x^2 + 2 > 1$
- $x - 1 \leq \tan(a)$

Comme pour les équations, résoudre une inéquation signifie trouver l'ensemble des solutions qui la rendent vraie. Nous devons donc nous poser la question du domaine dans lequel une inéquation a du sens, et quelles opérations nous pouvons utiliser pour déterminer les solutions.

Tentative de résolution d'une inéquation

$$2 < \frac{1}{x}$$

Tentative de résolution d'une inéquation

$$2 < \frac{1}{x} \tag{1}$$

$$2x < 1 \tag{2}$$

$$x < \frac{1}{2} \tag{3}$$

Cette solution est fausse, puisque, pour $x < 0$

$$\frac{1}{x} < 0 \implies \frac{1}{x} \not> 2$$

En effet, les assertions (1) et (2) ne sont pas équivalentes.

Pour passer de l'assertions (1) à l'assertion (2), nous avons appliqué la fonction $u \mapsto u \times x$, qui est bijective pour tout $x \neq 0$, mais elle ne préserve pas les inégalités.

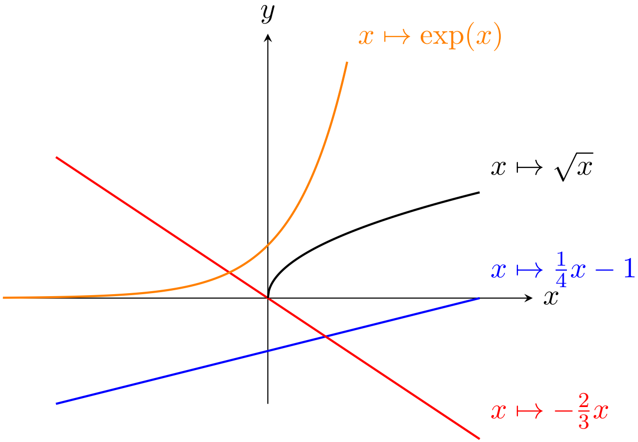
Fonctions strictement monotones

Définition

Une fonction f *est strictement croissante si* $x > y \implies f(x) > f(y)$. *De même, une fonction est strictement décroissante si* $x > y \implies f(x) < f(y)$.

Comme avant, nous pouvons utiliser le graphe d'une fonction pour savoir si elle correspond à ces critères.

Fonctions strictement monotones



Comme dans le cas des équations, il convient de s'assurer d'une part que les opérations que l'on applique soient bijectives, mais également, dans le cas des inéquations, d'appliquer des fonctions strictement croissantes afin de préserver l'inégalité, ou décroissantes, auquel cas il faut inverser l'inégalité. En effet, si la fonction f est décroissante, alors $x < y \implies f(x) > f(y)$.

Exemple

1. $x + 4 > 5 \iff x > 1$, car la fonction $u \mapsto u - 4$ est strictement croissante.
2. $\frac{x}{2} \leq 3 \iff x \leq 6$, car la fonction $u \mapsto 2u$ est strictement croissante.
3. $-2x < 3 \iff x > -\frac{3}{2}$ car la fonction $u \mapsto -2u$ est strictement décroissante.

Rappel factorisation d'un polynôme

Factoriser une somme ou une différence de plusieurs monômes, c'est la transformer en produit. Pour factoriser une expression littéral, on utilise la distributivité/mise en évidence (on reconnaît un facteur commun), les identités remarquables ou des outils comme la formule de Viète pour les polynômes de degré 2.

Exemple

1. Mise en évidence:
   $3x^5b^3 + 12ab^7x^2 - 9ab^4x = 3xb^3(x^4 + 4ab^4x - 3ab)$
2. Identités remarquables:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

3. Formule de Viète: $ax^2 + bx + c = a[x - \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}][x - \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}]$,
   où $\Delta = b^2 - 4ac$.

Inéquations avec des polynomes de degré > 2

De façon général, pour déterminer les solutions d'une inéquation de degré >2, il faut passer par les étapes suivantes:

1. Mettre tous les termes de l'inéquation d'un seul côté, de sorte à avoir 0 de l'autre.
2. Factoriser le côté non nul, afin de déterminer les zéros du produit (les éléments qui annulent le produit).
3. Construire un tableau des signes.
4. Analyser ce tableau pour déterminer l'ensemble des solutions.

Exemple 1

Exemple

Pour résoudre en x une inéquation comme $3x + 4 > 5x + 3$ (de degré 1), il faut mettre l'inégalité sous une des formes $x < a$, ou $x > a$, avec a une expression qui ne contient plus de x.

$$\begin{array}{rcr} 3x + 4 > 5x + 3 & \mid & -3x - 3 \\ 1 > 2x & \mid & /2 \\ 1/2 > x & & \end{array}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = (-\infty, 1/2)$

Exemple 2

Exemple

Déterminons l'ensemble des solutions de $x^3 > 4x^2 - 4x$.

1. Étape 1

$$x^3 > 4x^2 - 4x$$
$$x^3 - 4x^2 + 4x > 0$$

2. Étape 2

$$x^3 - 4x^2 + 4x = x(x^2 - 4x + 4) = x(x-2)^2$$

Les zéros de $x(x-2)^2$ sont $x = 2$ et $x = 0$.

Exemple 2

Exemple

3. Étape 3

x		0		2	
signe(x)	-	0	$+$	$+$	$+$
signe($(x-2)$)	-	-	-	0	$+$
signe($(x-2)$)	-	-	-	0	$+$
signe($x(x-2)^2$)	-	0	$+$	0	$+$

4. Étape 4

Les solutions de l'équation $x^2 > 4x - 4$ sont donc $(0,+\infty)\backslash\{2\}$.

Exemple 3

Déterminons l'ensemble des solutions de $|x+2| < 1$. Ici il faut en plus distinguer lorsque $x+2$ est positif ou négatif, et introduire ces informations dans le tableau des signes. Les étapes sont ensuite les mêmes qu'avant sauf qu'il faut choisir la bonne expression de $|x+2|$ suivant le domaine dans lequel on se trouve.

$$x+2 = \begin{cases} x+2 & , x \geq -2 \\ -x-2 & , x < -2 \end{cases}$$

Exemple 2

1. Étape 1

   L'inéquation $|x+2|-1<0$ se réécrit comme

   $$\begin{cases} x+2-1<0 & , x \geq -2 \\ -x-2-1<0 & , x < -2 \end{cases}$$

2. Étape 2

   $x+2-1$ s'annule en $x=-1$ et $-x-2-1$ en $x=-3$.

3. Étape 3

x		-3		-2		-1	
signe$((\|x+2\|-1))$	$+$	0	-	-	-	0	$+$

4. Etape 4

   L'ensemble des solutions est donc $(-3,-1)$.

Exercice 1

Résoudre en x les inéquations suivantes:

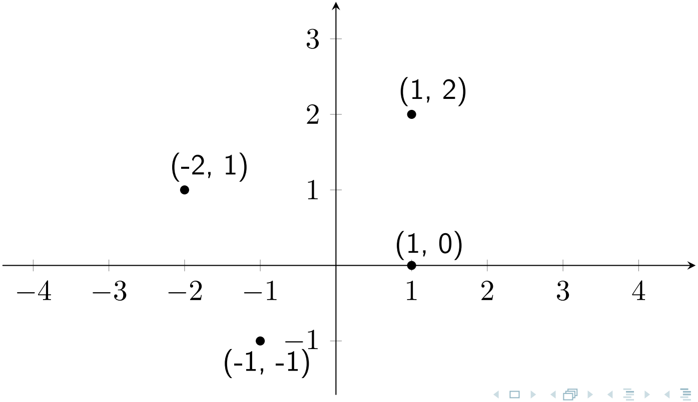
1. $7x - 1 \geq 5x + 8$
2. $3x + 15 \geq x + 2(7 + x)$
3. $x^2 + 3x < -x - 5$
4. $x^4 - 2x^2 < x^2 + 2x$
5. $|2x + 5| \leq 7$

Solution ex1

1. $\mathcal{S} = [9/2, +\infty)$
2. $\mathcal{S} = \mathbb{R}$
3. $\mathcal{S} = \emptyset$
4. $\mathcal{S} = (0, 2)$
5. $\mathcal{S} = [-6, 1]$

Décrire le plan

Un système de coordonnées permet d'assigner un couple ordonné de nombres réels $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ à chaque point d'un plan. *Notation :* $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Ici, nous munissons le plan d'un système de coordonnées orthonormal.

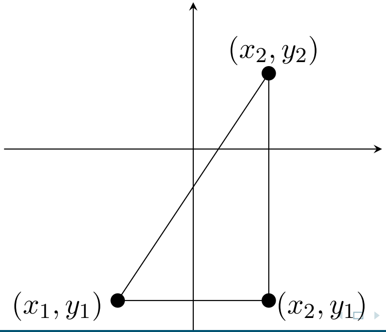


Distances

Définition

*La **distance** entre les points* $A = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ *et* $B = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$, *notée* $d(A, B)$, *est donnée par*

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{1}$$



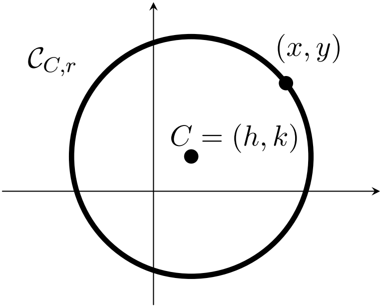
Cercles

Définition

Soient $r > 0$ et $C = (h, k) \in \mathbb{R}^2$. L'ensemble

$$\mathcal{C}_{C,r} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\right\} \tag{2}$$

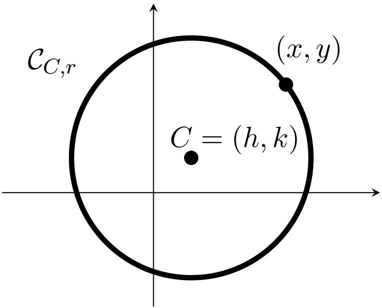
est le ***cercle*** *de centre C et de rayon r.*



Cercles

Autrement dit, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un point du cercle $\mathcal{C}_{C,r}$ si et seulement si

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \qquad (3)$$



Cercles

Justification de la définition: un cercle de centre $C = (h, k) \in \mathbb{R}^2$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble de tous les points à distance r de C. Ainsi,

$$(x, y) \in \mathcal{C}_{C,r} \Leftrightarrow d((x, y), C) = r \Leftrightarrow (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad (4)$$

Exercice

Trouver une équation du cercle de centre $(-2, 3)$ et qui contient le point $(4, 5)$.

Exercice

Donner le centre et le rayon du cercle d'équation $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 3$.

Droites

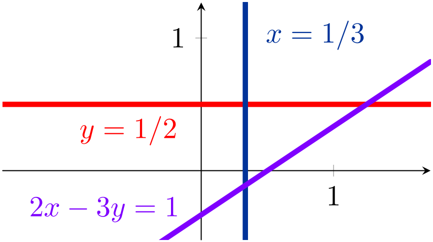
Définition

*Une **droite** dans le plan est un ensemble de la forme*

$$d = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = c\} \tag{5}$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$ sont tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

- Si $a = 0$ et $b \neq 0$, alors $d \parallel (Ox)$.
- Si $a \neq 0$ et $b = 0$, alors $d \parallel (Oy)$.



Droites

Définition

Soit $\ell \subset \mathbb{R}^2$ une droite non verticale et soient $A = (x_1, y_1) \in \ell$ et $B = (x_2, y_2) \in \ell$. Le rapport

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{6}$$

*est la **pente** de la droite $(AB) = \ell$. Si $x_1 = x_2$, alors la pente n'est pas définie.*

Exercice

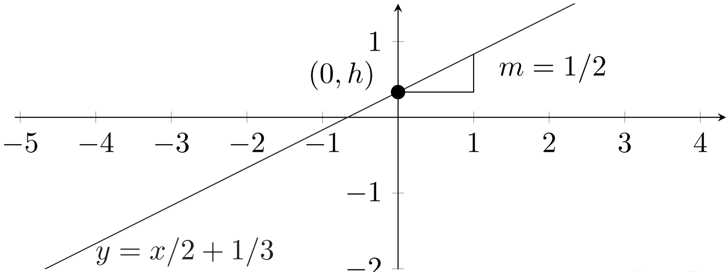
Calculer la pente de la droite d'équation $6x + 3y = 4$.

Droites

Remarque: Soit d une droite non parallèle à (Oy). Alors deux paramètres réels sont suffisants pour déterminer son équation. Dans ce cas, on peut en effet écrire

$$d = \{(x, y) \mid y = mx + h\}\,. \tag{7}$$

où m est la pente de d et $h \in R$ est **l'ordonnée à l'origine** de d i.e. $(0, h) \in d$.



Droites

Exercice

Trouver une équation de la forme $ax + by = c$ pour la droite satisfaisant chaque condition donnée.

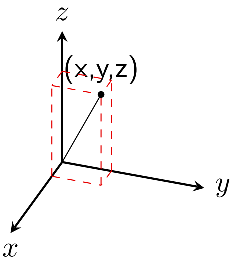
1. *contient* $(5, -3)$, *pente* $m = -4$.
2. *contient* $(1, 4)$ *et* $(1, -2)$.
3. *contient* $(-2, 1)$ *et* $(3, 7)$.

Exercice

- *Montrer que deux droites non verticales sont parallèles si et seulement si elles ont la même pente.*
- *Montrer que deux droites avec des pentes* m_1 *et* m_2 *sont perpendiculaires si et seulement si* $m_1 m_2 = -1$.

Décrire l'espace

Comme pour le plan, l'espace $\mathbb{R}^3$ peut aussi être muni d'un système de coordonnées. Les éléments de l'espace, les points, sont décris par un triplet de nombres réels : (x, y, z), $x, y, z \in \mathbb{R}$.



Décrire l'espace: généralisations

Définition

*La **distance** entre les points* $A = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ *et* $B = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, *notée* $d(A, B)$, *est donnée par*

$$d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{8}$$

Définition

Soient $r > 0$ *et* $C = (h, k, l) \in \mathbb{R}^2$. *L'ensemble*

$$\mathcal{S}_{C,r} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2\right\} \tag{9}$$

*est la **sphère** de centre* C *et de rayon* r.

Décrire l'espace: généralisations

Définition

Un ***plan*** *dans l'espace est un ensemble de la forme*

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = d\} \tag{10}$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *sont tels que* $a \neq 0$ *ou* $b \neq 0$ *ou* $c \neq 0$.

Remarque: On peut décrire une droite ou un cercle dans l'espace par 2 projections sur les plans Oxy, Oxz ou Oyz.

1. Principes de résolution d'une équation
2. Inéquations
3. Le plan et l'espace
4. **Systèmes d'équations**
5. Notation Σ
6. Feedback

Systèmes d'équations

Définition

*Un **système d'équations** est un ensemble fini d'équations, avec généralement plusieurs inconnues, que l'on cherche à résoudre simultanément. Un n-uplet est une **solution** d'un système d'équations s'il est une solution de chaque équation du système.*

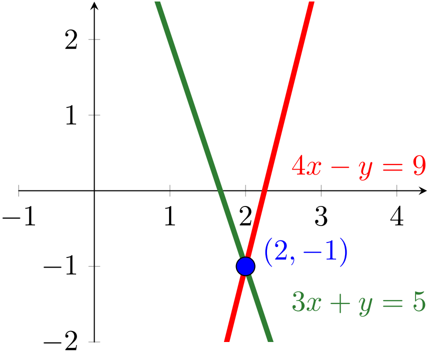
Remarque : Pour un système d'équations à n inconnues, l'ensemble des solutions (ES) est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

Exemple

Soit le système $\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 4x - y = 9 \end{cases}$. Les ensembles de solutions des deux équations sont $S_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x + y = 5\right\}$ et $S_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x - y = 9\right\}$. Ainsi, l'ensemble des solutions du système est $S_1 \cap S_2 = \{(2, -1)\}$.

Systèmes d'équations

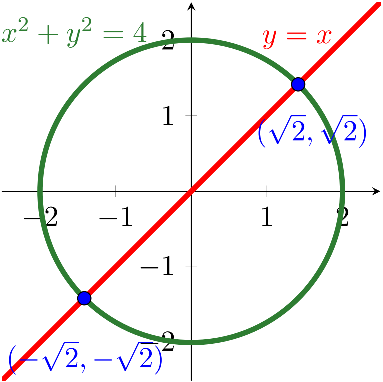
$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 4x - y = 9 \end{cases}$$. Ensemble de solutions : $S = \{(2, -1)\}$



Systèmes d'équations

Autre exemple: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y = x \end{cases}$. Ensemble de solutions :

$S = \{(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (\sqrt{2}, \sqrt{2})\}$



Méthode de résolution : substitution

Résolvons le système $\begin{cases} x + y^2 = 6 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$ par substitution.

1. *Résoudre une des équations pour une variable u par rapport à l'autre variable v:* $x = 3 - 2y$ avec $u = x$ et $v = y$.
2. *Substituer l'expression pour u trouvée en 1 dans l'autre équation, ce qui nous donne une équation en v:* $3 - 2y + y^2 = 6$. Simplifier : $y^2 - 2y - 3 = 0$.
3. *Résoudre l'équation en v trouvée en 2:* $y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y \in \{1, 3\}$.
4. *Substituer les valeurs de v trouvées en 3 dans l'équation trouvée en 1 et déterminer les valeurs de u correspondantes:* $y = 3 \Rightarrow x = -3$, $y = -1 \Rightarrow x = 5$. Des solutions possible sont $(-3, 3)$ et $(5, -1)$.
5. *Vérifier chaque couple trouvé en 4 dans le système:* l'ensemble des solution est bien $S = \{(-3, 3), (5, -1)\}$.

Systèmes d'équations

Exercice

Résoudre les systèmes suivant:

- $\begin{cases} 3x - 4y + 20 = 0 \\ 3x + 2y + 8 = 0 \end{cases}$
- $\begin{cases} y = x^2 - 4 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$
- $\begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ y - 3x = 2 \end{cases}$
- $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ x^2 + y = 19 \end{cases}$

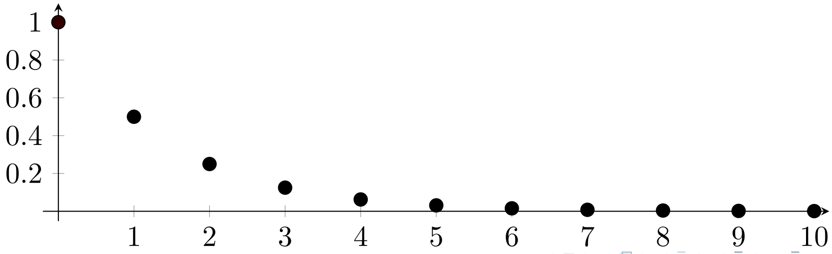
Notation Σ : suite numérique

Définition

Une ***suite numérique*** *est une fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, habituellement dénotée (u_n).*

Exemple

$u_n = 1/2^n$



Notation Σ

Il est parfois utile de trouver la somme d'une partie des éléments d'une suite numérique. Considérons les éléments $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ d'une suite numérique (a_n). Il est courant d'exprimer la somme du m-ième terme jusqu'au n-ième ainsi :

$$\sum_{i=m}^{n} a_i := a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{n-1} + a_n$$

Exemples

1. $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \sum_{i=1}^{n} i$
2. $1 + 3 + 5 + \ldots + 2n + 1 = \sum_{i=1}^{n} 2i + 1$

Notation Σ

Exemple

$$\sum_{k=1}^{4} k^2(k-3) = 1^2(1-3) + 2^2(2-3) + 3^2(3-3) + 4^2(4-3)$$
$$= (-2) + (-4) + 0 + 16 = 10$$

Exercice

- *Trouver les 4 premiers termes ($n = 1 \ldots 4$) des suites* $u_n = 12 - 3n$ *et* $v_n = k^2 - 5$.
- *Calculer les sommes* $\sum_{k=1}^{4} u_k$, $\sum_{k=1}^{4} v_k$, $\sum_{k=137}^{428} 2.1$, $\sum_{k=0}^{4} 3(2^k)$. *Calculer* $\sum_{k=1}^{n} 1/2^k$ *pour* $n = 1, 2, 3$. *Par quelle valeur peut-on approximer cette somme lorsque* n *est grand ?*

Série géométrique (si le temps le permet)

Soit $q \neq 1$. On aimerait évaluer $\sum_{k=0}^{n} q^k$. On observe que

$$\begin{aligned}(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k &= \sum_{k=0}^{n}(q^k - q^{k+1}) \\ &= 1\underbrace{-q+q-q^2+q^2-q^3+\ldots-q^n+q^n}_{=0}-q^{n+1} \\ &= 1-q^{n+1}\end{aligned}$$

Par conséquent, $\sum_{k=0}^{n} q^k = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$. De plus, si $-1 < q < 1$ et n est grand, alors

$$\sum_{k=0}^{n} q^k \approx \frac{1}{1-q}$$

Questionnaire