Matrices
Programme CAFE-S

Université de Genève

Juillet 2022

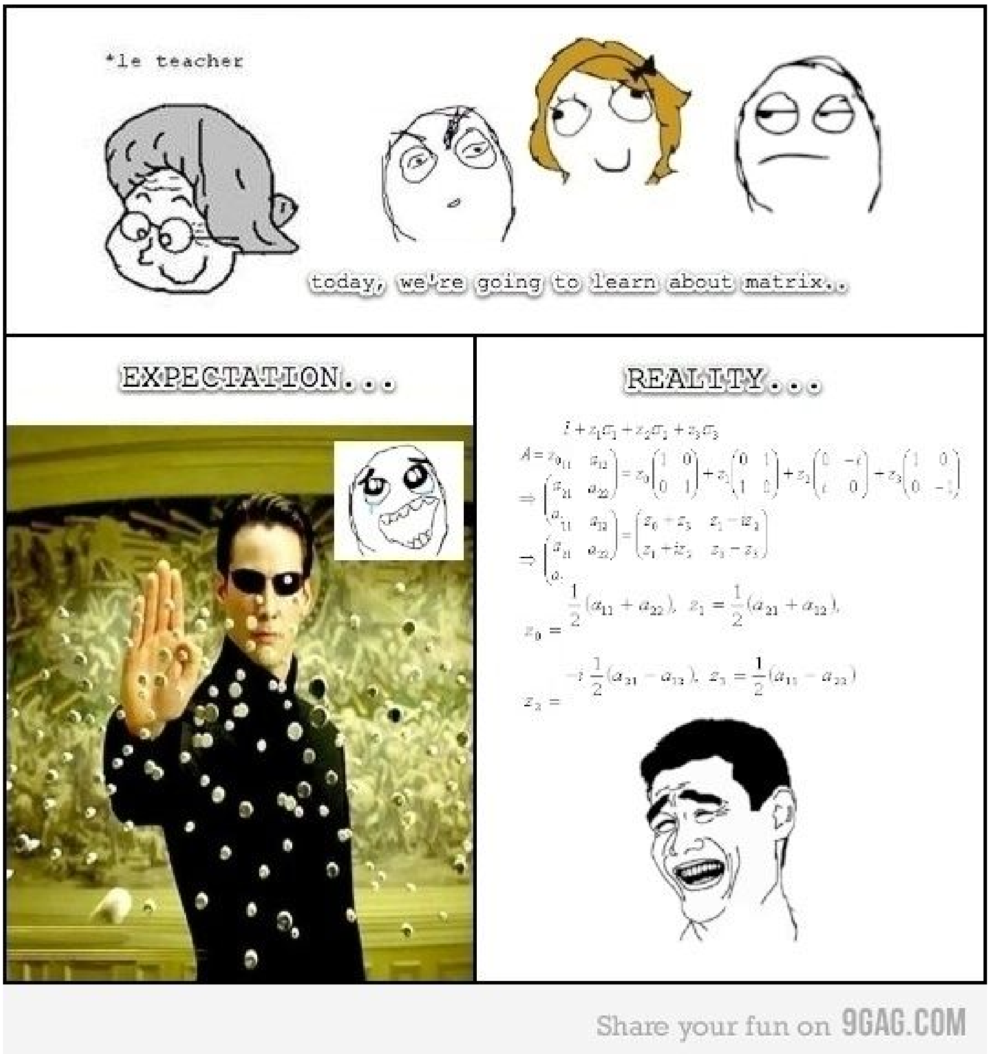

Table des matières

1 Introduction

Les matrices constituent un outil très puissant dans le domaine de l'Algèbre Linéaire, dans la résolution des systèmes d'équations linéaires, interviennent dans la résolution des certaines équations différentielles ordinaires, donnent des propriétés sur des graphes. Par ailleurs, les matrices permettent de travailler plus simplement avec les fonctions linéaires et leur analogue général : les applications linéaires (vues en Algèbre Linéaire).
En réalité, c'est l'Algèbre Linéaire - que vous aurez l'occasion d'étudier - qui fournit une définition de matrice davantage satisfaisante que celle donnée ici.

Dans ce document, nous vous proposons un cours basique sur les matrices.

2 Premières définitions

Définition 1 *Une* **matrice** *est une tableau rectangulaire de nombres qui est de la forme :*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Une matrice est dite de **taille** $m \times n$ *si elle est constituée de m lignes et n colonnes.*
Les nombres a_{ij} ($a_{ij} \in \mathbb{R}$) qui figurent dans une matrice sont appelés les **coefficients** *de la matrice.*

Remarque 1 *Le coefficient a_{ij} d'une matrice A est le nombre qui apparaît à la* ligne *i de A et à la* colonne *j de A.*

Exemple 1 Regardons quelques exemples afin de rendre le concept de matrice plus concret :

1. $$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

   A est une matrice de taille 2×4, comme elle est constituée de 2 lignes et de 4 colonnes. En outre, nous avons les coefficients suivants :

   $$a_{11} = 0\,,\; a_{12} = 1\,,\; a_{13} = -3\,,\; a_{14} = 4\,,\; a_{21} = 2\,,\; a_{22} = -1\,,\; a_{23} = 7\,,\; a_{24} = 5.$$

2. $$B = \begin{pmatrix} 13 \\ -\frac{5}{2} \\ 8 \end{pmatrix}$$

   B est une matrice de taille 3×1, car il y a 3 lignes et 1 colonne.

3. $$C = \begin{pmatrix} -3 & 7\sqrt{2} & 1 & 5 & -9 \end{pmatrix}$$

   C est une matrice de taille 1×5, car il y a 1 ligne et 5 colonnes.

4. $$D = \begin{pmatrix} 16 & -5 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

   D est une matrice de taille 2×2, comme nous avons 2 lignes et 2 colonnes.

Terminologie 1 *À la suite de ces exemples, nous allons introduire la terminologie suivante :*

1. *Une matrice de taille $n \times n$ est une* **matrice carrée** *et* **de taille** n.
2. *Une matrice de taille $1 \times n$ est une* **matrice ligne**.
3. *Une matrice de taille $n \times 1$ est une* **matrice colonne**.

Dans l'Exemple 1, B est une matrice colonne, C est une matrice ligne et D est une matrice carrée de taille 2.

Remarque 2 *Si nous repensons aux coordonnées d'un point de l'espace, celles-ci s'écrivent comme* $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, *ce qui est exactement une matrice de taille* 3×1. *Il en va d'ailleurs de même pour les vecteurs, comme les coordonnées d'un point P sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OP}$, où O est l'origine de l'espace. Donc, en fait, les vecteurs sont un cas particulier de matrices.*

Avant de passer à la suite, nous allons introduire une notation plus compacte pour une matrice quelconque, que celle utilisée dans la définition :

Notation 1 *Nous pouvons noter une matrice quelconque A de taille $m\times n$ par* $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$.

Cette notation signifie que nous prenons des coefficients a_{ij} quelconques qui constituent notre matrice A : i varie entre 1 et m car A est supposée de taille $m\times n$, donc constituée de m lignes et n colonnes, ce qui justifie également que j varie entre 1 et n.

Proposition 1 *Deux matrices* $A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}}$ *et* $B = (b_{ij})_{\substack{1\le i\le k \\ 1\le j\le \ell}}$ *sont égales si, et seulement si, A et B sont de même taille, c'est-à-dire $m = k$ et $n = \ell$ et si, pour tous i et j :*

$$a_{ij} = b_{ij}$$

c'est-à-dire que les coefficients à la même position sont égaux.

Exemple 2 Concrétisons cette propriété :

1. Les matrices A et B suivantes ne sont pas égales

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -6 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

car A est de taille 2×1, alors que B est une matrice carrée de taille 2.

2. Les matrices A et B suivantes, bien qu'elle soient de même taille, ne sont pas égales

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 17 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -6 & -5 \\ 17 & 2 \end{pmatrix}$$

car $a_{11} = 6 \neq -6 = b_{11}$. Alors que

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 17 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 17 & 2 \end{pmatrix}$$

sont égales.

3 Opérations sur les matrices

En Mathématiques, nous apprenons successivement à additionner, soustraire, multiplier et diviser des nombres réels, ce qui nous laisse penser qu'il existe quatre opérations mathématiques. En réalité, il n'en existe que deux : l'addition et la multiplication. En effet, soient $a, b \in \mathbb{R}$:

$$a - b = a + (-1)\cdot b \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} = a\cdot\frac{1}{b} = a\cdot b^{-1}$$

en utilisant que $\frac{1}{b} = b^{-1}$, ***sous l'hypothèse que*** $b \neq 0$ [1]. Ainsi, nous avons réussi à définir la soustraction et la division de nombres réels à partir de l'addition et de la multiplication.

1. Puisqu'il nous est impossible de diviser par 0, par souci de rigueur, il nous faut préciser - voire, selon les cas, justifier (en manipulant des hypothèses) - que le dénominateur ne peut être nul.

L'intérêt de tout ceci est que, en Algèbre, quand nous introduisons un nouvel objet mathématique, il nous importe de définir ses lois de composition (dans le cas des matrices, il s'agit de l'addition et de la multiplication), afin d'établir les propriétés de cet objet mathématique. Et c'est précisément ce que nous allons faire avec notre nouvel objet mathématique qu'est une matrice.

3.1 L'addition

Définition 2 *Soient A et B deux matrices de taille $m \times n$:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

*Nous définissons l'***addition** *$A + B$ des deux matrices A et B comme suit :*

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m_1} & a_{m2} + b_{m2} & a_{m3} + b_{m3} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

En assez simple, cela signifie que nous additionnons les coefficients qui sont à la même position.

Remarque 3 *La condition nécessaire pour additionner deux matrices est qu'elles aient la même taille. Si cette condition n'est pas satisfaite, l'opération d'addition ne peut être effectuée !*

Faisons un exemple :

Exemple 3 Prenons :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 0 & 41 & -1 \\ 7 & -11 & -3 \\ 4 & -21 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 8 \\ -20 & 7 & 19 \\ -2 & 6 & 13 \\ -11 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ces deux matrices sont de taille 4×3 donc, par la Remarque 3, il est possible d'additionner A et B :

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 0 & 41 & -1 \\ 7 & -11 & -3 \\ 4 & -21 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 12 & 8 \\ -20 & 7 & 19 \\ -2 & 6 & 13 \\ -11 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5+1 & 2+12 & 1+8 \\ 0+(-20) & 41+7 & -1+19 \\ 7+(-2) & -11+6 & -3+13 \\ 4+(-11) & -21+0 & 6+(-4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -4 & 14 & 9 \\ -20 & 48 & 18 \\ 5 & -5 & 10 \\ -7 & -21 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous pouvons même remarquer que :

$$\begin{aligned}
B + A &= \begin{pmatrix} 1 & 12 & 8 \\ -20 & 7 & 19 \\ -2 & 6 & 13 \\ -11 & 0 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 0 & 41 & -1 \\ 7 & -11 & -3 \\ 4 & -21 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1+(-5) & 12+2 & 8+1 \\ -20+0 & 7+41 & 19+(-1) \\ -2+7 & 6+(-11) & 13+(-3) \\ -11+4 & 0+(-21) & -4+6 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -4 & 14 & 9 \\ -20 & 48 & 18 \\ 5 & -5 & 10 \\ -7 & -21 & 2 \end{pmatrix} \\
&= A + B
\end{aligned}$$

Rappel *Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$:*

1.

$$a + b = b + a$$

C'est la **commutativité** *de l'addition : le résultat ne change pas si nous échangeons les termes de places.*

2.

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

*C'est ce que nous appelons l'***associativité** *de l'addition : c'est-à-dire que nous avons le droit de regrouper des termes ensemble, sans changer le résultat.*

Ce qui nous amène à :

Proposition 2 *L'addition de matrices est* ***commutative*** *:*

$$A + B = B + A \quad \text{pour toutes matrices de même taille } A \text{ et } B.$$

Remarque 4 *En fait, comme l'addition de deux matrices s'effectue simplement comme l'addition des coefficients - des nombres réels - qui sont à la même position, la commutativité de l'addition des matrices n'est pas surprenante. En effet, elle provient de la commutativité de l'addition de deux nombres réels :*

$$a + b = b + a \quad \text{pour tous nombres réels } a \text{ et } b.$$

Plus précisément, en reprenant les notations de la Définition 2, le coefficient de $A + B$ à la ligne i et à la colonne j, noté $(A + B)_{ij}$, s'obtient comme :

$$(A + B)_{ij} = a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij} = (B + A)_{ij}$$

en utilisant la commutativité discutée précédemment.

Ainsi, il est naturel de penser que les propriétés de l'addition des nombres réels s'appliquent également à l'addition des matrices, et c'est vrai ! En l'occurrence, l'addition des nombres réels est associative - aussi dite "les parenthèses n'ont pas d'importance en additionnant plus de deux nombres réels", ce qui nous amène à :

Proposition 3 *L'addition de matrices est* ***associative*** *:*

$$A + (B + C) = (A + B) + C \quad \text{pour toutes matrices de même taille } A, B \text{ et } C.$$

3.2 La multiplication

Passons maintenant à la multiplication dans le cas des matrices ; nous allons traiter successivement trois cas de figure que voici :

3.2.1 Multiplication d'une matrice par un nombre réel

Dans le cas des nombres réels, nous savons ce qu'est le double de a, avec $a \in \mathbb{R}$, que nous écrivons $2 \cdot a$. Il en va de même pour la moitié, le triple, le cinquième, etc. Partant de ça, il est légitime que nous nous demandions ce qu'est le double d'une matrice A - que nous devrions logiquement noter $2 \cdot A$ - sa moitié, son triple, son cinquième, etc. Mais, avant de nous y attaquer, remarquons que dans $2 \cdot a$, il s'agit de multiplier deux nombres réels : 2 et a. Tandis que dans $2 \cdot A$, il s'agit de multiplier un nombre réel - qui est 2 - et une matrice - qui est A. Autrement dit, nous ne multiplions pas des objets mathématiques appartenant à la même "catégorie". C'est pour cette raison que nous avons besoin de traiter ce cas de multiplication séparément.

Revenons à cette histoire de $2 \cdot a$: $2 \cdot a$ est en fait la somme de a avec lui-même 2 fois :

$$2 \cdot a = a + a.$$

Logiquement, ce que désigne $2 \cdot A$ devrait également être la somme de A avec lui-même 2 fois. Et c'est à partir de ce point de vue que nous allons être capable de donner une définition de $\lambda \cdot A$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Avec le notation compacte, nous avons :

$$2 \cdot A = 2 \cdot (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} + (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = (a_{ij} + a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} = (2 \cdot a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

Nous pouvons raisonner similairement pour n'importe quel entier naturels $n \in \mathbb{N}$. Cette intuition se généralise assez facilement aux entiers $n \in \mathbb{Z}$ et aux rationnels $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, avec $q \neq 0$, et se généralise un peu plus difficilement aux nombres réels $\lambda \in \mathbb{R}$.

Passons à la définition :

Définition 3 *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et soit A une matrice de taille $m \times n$:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Nous définissons le **produit de A par λ** *comme suit :*

$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} & \lambda \cdot a_{13} & \dots & \lambda \cdot a_{1n} \\ \lambda \cdot a_{21} & \lambda \cdot a_{22} & \lambda \cdot a_{23} & \dots & \lambda \cdot a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda \cdot a_{m1} & \lambda \cdot a_{m2} & \lambda \cdot a_{m3} & \dots & \lambda \cdot a_{mn} \end{pmatrix}$$

En termes plus explicites, cela signifie que nous multiplions chacun des coefficients de A par λ.

Terminologie 2 *Nous appelons $\lambda \in \mathbb{R}$ un* **scalaire**.

Regardons un exemple :

Exemple 4 Prenons

$$A = \begin{pmatrix} -15 & 4 & 10 \\ 8 & -14 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Nous avons :

$$3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} -15 & 4 & 10 \\ 8 & -14 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot (-15) & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 10 \\ 3 \cdot 8 & 3 \cdot (-14) & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 & 3 \cdot (-3) \\ 3 \cdot 5 & 3 \cdot (-1) & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45 & 12 & 30 \\ 24 & -42 & -3 \\ 6 & 9 & -9 \\ 15 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

De même :

$$\frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot A = \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot \begin{pmatrix} -15 & 4 & 10 \\ 8 & -14 & -1 \\ 2 & 3 & -3 \\ 5 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot (-15) & \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot 4 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot 10 \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot 8 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot (-14) & \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot (-1) \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot 2 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot 3 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot (-3) \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot 5 & \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot (-1) & \frac{-\sqrt{2}}{2} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{15\sqrt{2}}{2} & -2\sqrt{2} & -5\sqrt{2} \\ -4\sqrt{2} & 7\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{2} & \frac{-3\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-5\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Proposition 4 *Soient A et B deux matrices même taille et soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.*

1. *$(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$, c'est la* **distributivité** *du produit sur la somme des scalaires.*
2. *$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$, c'est la* **distributivité** *du produit sur la somme des matrices.*
3. *$(\lambda \cdot \mu) \cdot A = \lambda \cdot (\mu \cdot A)$, c'est l'***associativité** *du produit d'une matrice par plusieurs scalaires.*
4. *$\lambda \cdot A = A \cdot \lambda$, c'est la* **commutativité** *du produit d'une matrice par un scalaire.*

3.2.2 Multiplication d'une matrice par une matrice colonne

Nous sommes maintenant en voie de définir le produit de deux matrices. Nous allons commencer par le cas particulier du produit d'une matrice de taille $m \times n$ par une matrice colonne de taille $n \times 1$:

Définition 4 *Soient A et B deux matrices de tailles respectives $m \times n$ et $n \times 1$:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}.$$

Nous définissons le **produit de A par B**, *qui est une matrice colonne de taille $m \times 1$, comme suit :*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \cdots + a_{1n} \cdot b_{n1} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + \cdots + a_{2n} \cdot b_{n1} \\ \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{11} + a_{m2} \cdot b_{21} + \cdots + a_{mn} \cdot b_{n1} \end{pmatrix}$$

Ce qu'il se passe à la première ligne, par exemple, c'est que nous prenons le premier coefficient de la matrice A - a_{11} - que nous multiplions avec le premier coefficient de la matrice B - b_{11}. Nous additionnons ce produit au produit des deuxièmes coefficients : $a_{12} \cdot b_{21}$, et ainsi de suite jusqu'à arriver à $a_{1n} \cdot b_{n1}$. Nous procédons de la même façon pour chaque ligne de A. Avec un exemple, ce sera plus simple à visualiser :

Exemple 5 Considérons

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Nous avons :

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 7 \cdot (-1) \\ 4 \cdot 3 + -2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Remarque 5 *Attention, dans ce cas particulier, produit $B \cdot A$ n'est pas défini. Nous verrons pourquoi au paragraphe suivant.*

3.2.3 Multiplication de deux matrices

Maintenant, nous allons enfin définir le produit de deux matrices, sans nous retreindre au cas particulier précédent :

Définition 5 *Soient A et B deux matrices de tailles respectives $m \times n$ et $n \times p$:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad et \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}.$$

Nous définissons le **produit** *$A \cdot B$ des deux matrices A et B comme suit :*

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot b_{kp} \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2k} \cdot b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{2k} \cdot b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{2k} \cdot b_{kp} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{mk} \cdot b_{k1} & \sum_{k=1}^{n} a_{mk} \cdot b_{k2} & \dots & \sum_{k=1}^{n} a_{mk} \cdot b_{kp} \end{pmatrix}$$

En peu compact, c'est égal à :

$$\begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n2} & \dots & a_{11} \cdot b_{1p} + a_{12} \cdot b_{2p} + \dots + a_{1n} \cdot b_{np} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + \dots + a_{2n} \cdot b_{n1} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + \dots + a_{2n} \cdot b_{n2} & \dots & a_{21} \cdot b_{1p} + a_{22} \cdot b_{2p} + \dots + a_{2n} \cdot b_{np} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} \cdot b_{11} + a_{m2} \cdot b_{21} + \dots + a_{mn} \cdot b_{n1} & a_{m1} \cdot b_{12} + a_{m2} \cdot b_{22} + \dots + a_{mn} \cdot b_{n2} & \dots & a_{m1} \cdot b_{1p} + a_{m2} \cdot b_{2p} + \dots + a_{mn} \cdot b_{np} \end{pmatrix}$$

Remarque 6 *En général, si A est de taille $m \times n$ et B est de taille $n \times p$, $A \cdot B$ sera une matrice de taille $m \times p$.*

En fait, il s'agit de multiplier la matrice A par chaque colonne de la matrice B.

Rendons cela plus digeste :
Disons que le produit de A et B est représenté par une matrice C, comme suit :

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mp} \end{pmatrix}$$

Pour trouver l'expression ce c_{11}, il nous faut multiplier la ligne 1 de A avec la colonne 1 de B comme dans la Définition 4, ce qui donne exactement :

$$c_{11} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot b_{k1}$$

De la même façon, pour trouver l'expression de c_{12}, nous multiplions la ligne 1 de A avec la colonne 2 de B :

$$c_{12} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot b_{k2}$$

En règle générale, le coefficient c_{ij} s'obtient en multipliant la ligne i de A et la colonne j de B.

Nous pouvons réaliser une chose :
Il faut qu'il y ait autant de coefficients dans une ligne de A que de coefficients dans une colonne de B, afin de calculer $A \cdot B$.
Cela donne lieu à la condition nécessaire suivante :

Remarque 7 *Afin de pouvoir multiplier deux matrices A et B de tailles respectives $m \times n$ et $k \times \ell$, il faut que $n = k$. Dans ce cas, nous disons que A et B sont* **compatibles**.

Faisons un exemple :

Exemple 6 Considérons

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

A est de taille $2 \times \mathbf{2}$ et B est de taille $\mathbf{2} \times 3$, elles sont donc compatibles.
Nous avons :

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 7 + (-2) \cdot 4 & 5 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) & 5 \cdot 2 + (-2) \cdot 6 \\ 1 \cdot 7 + 3 \cdot 4 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 2 & -2 \\ 19 & -3 & 20 \end{pmatrix}$$

En revanche, le produit $B \cdot A$ n'est pas possible, comme B possède 3 colonnes et A possède 2 lignes. Si B avait été carrée de taille 2, les deux produits auraient été possibles. Pour cela, considérons :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$A \cdot \tilde{B} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 7 + (-2) \cdot 4 & 5 \cdot 0 + (-2) \cdot (-1) \\ 1 \cdot 7 + 3 \cdot 4 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 2 \\ 19 & -3 \end{pmatrix}$$

Et :

$$\tilde{B} \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \cdot 5 + 0 \cdot 1 & 7 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 \\ 4 \cdot 5 + (-1) \cdot 1 & 4 \cdot (-2) + (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & -14 \\ 19 & -11 \end{pmatrix}$$

Nous remarquons que

$$A \cdot \tilde{B} \neq \tilde{B} \cdot A$$

Remarque 8 *En général, le produit matriciel n'est pas commutatif, donc l'ordre des facteurs est hautement important !*
Pour des raisons de compatibilité, afin de pouvoir observer ce phénomène, il faut que les matrices soient compatibles "à droite" et "à gauche", ce qui revient à ce que A soit de taille $m \times n$ et B de taille $n \times m$. En outre, nous pouvons observer que, $A \cdot B$ sera une matrice de taille $m \times m$ et $B \cdot A$ une matrice de taille $n \cdot n$, ce qui, pour $n \neq m$, ne peut donner lieu à deux matrices égales, par la Proposition 1.

Proposition 5 *Soient A, B et C trois matrices carrées de même taille. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.*

1. *Le produit matriciel est associatif : $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$.*
2. *Le produit matriciel se distribue sur l'addition, à droite et à gauche :*

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \text{ et } (B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A.$$

3. *Nous avons :*

$$\lambda \cdot (A \cdot B) = A \cdot (\lambda \cdot B). \tag{1}$$

4 Les deux autres opérations

4.1 La soustraction

Nous avons établi, au paragraphe précédent, que les deux opérations centrales, en Algèbre, étaient l'addition et la multiplication.
Ici, nous allons voir comment se définit la soustraction matricielle, à partir de l'addition et de la multiplication.
Définition 6 *Soient A et B deux matrices de même taille.*
La **soustraction** *$A - B$ est définie ainsi :*

$$A - B = A + (-1) \cdot B.$$

Nous définissons donc la soustraction matricielle à partir de de l'addition matricielle et de la multiplication d'une matrice par un réel !

Remarque 9 *L'usage de l'addition donne la condition nécessaire à la soustraction suivante :* les deux matrices doivent être de même taille !

Par exemple :

Exemple 7 Prenons :

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 0 & 41 & -1 \\ 7 & -11 & -3 \\ 4 & -21 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 12 & 8 \\ -20 & 7 & 19 \\ -2 & 6 & 13 \\ -11 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Ces deux matrices sont de taille 4×3 :

$$\begin{aligned} A - B &= \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 0 & 41 & -1 \\ 7 & -11 & -3 \\ 4 & -21 & 6 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 12 & 8 \\ -20 & 7 & 19 \\ -2 & 6 & 13 \\ -11 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 0 & 41 & -1 \\ 7 & -11 & -3 \\ 4 & -21 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & -12 & -8 \\ 20 & -7 & -19 \\ 2 & -6 & -13 \\ 11 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5+-1 & 2+-12 & 1+-8 \\ 0+20 & 41+-7 & -1+-19 \\ 7+2 & -11+-6 & -3+-13 \\ 4+11 & -21+0 & 6+4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 & -10 & -7 \\ 20 & 34 & -20 \\ 9 & -17 & -16 \\ 15 & -21 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

4.2 La division

La division est une autre paire de manches. Nous l'avons dit plus haut : $\frac{a}{b}$ n'est rien d'autre que le produit des nombres réels a et b^{-1}, pour autant que b soit non-nul. Logiquement, pour les matrices, il en est de même. En revanche, nous laissons tomber la notation fractionnaire, c'est-à-dire que nous écrirons $A \cdot B^{-1}$ au lieu de $\frac{A}{B}$.
Par conséquent, tout l'enjeu est de pouvoir exprimer B^{-1}, que nous appelons l'***inverse de*** B !
Dans le cas des nombres réels, l'inverse de x est un réel y tel que

$$x \cdot y = y \cdot x = 1$$

et nous notons ce y par $\frac{1}{x}$. Or, cet inverse existe sous la condition *sine qua non* que x soit non-nul.
Ainsi, il nous faudra trouver sous quelle(s) condition(s) l'inverse d'une matrice existerait.
En attendant, il nous apparaît qu'afin de définir l'inverse d'une matrice, nous avons besoin d'un analogue de 1 pour les matrices :
Définition 7 *Nous appelons* **matrice identité de taille** n *la matrice carrée de taille n suivante :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque 10 *C'est une matrice avec des zéros partout, sauf sur la diagonale où il n'y a que des 1.*

Notation 2 *Nous notons la matrice identité de taille n : I_n.*

Rappelons que 1 a la propriété suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ 1 \cdot x = x \cdot 1 = x \tag{2}$$

Donc, afin que I_n soit le bon équivalent de 1 dans le cas des matrices, I_n doit satisfaire (2) :

Proposition 6 *Pour toute matrice carrée A de taille n :*

$$I_n \cdot A = A \cdot I_n = A$$

Exercice 1 Vous pouvez prouver la Proposition 6 en prenant une matrice quelconque A carrée de taille n. C'est un bon exercice pour démontrer des propriétés et vérifier votre compréhension de la multiplication matricielle, que nous vous encourageons vivement à faire !

Maintenant, nous pouvons donner la définition suivante :

Définition 8 *Soit A une matrice **carrée** de taille n.*
*A est une **matrice inversible** s'il existe une matrice B carrée de taille n telle que*

$$A \cdot B = B \cdot A = I_n$$

*Nous appelons B la **matrice inverse** de A.*

Une question légitime serait la suivante : pourquoi nous restreignons-nous aux matrices carrées ? Nous avons déjà établi, dans la Remarque 8 que, afin que deux matrices A et B se multiplient à droite et à gauche, il est impératif que A soit de taille $m \times n$ et que B soit de taille $n \times m$. En outre, $A \cdot B$ serait de taille $m \times m$ et $B \cdot A$ serait de taille $n \times n$. Or, dans la Définition 8, nous explicitons la requête que $A \cdot B$ et $B \cdot A$ soient toutes deux de taille $n \times n$, ce qui implique que $m = n$ et donc que A et B sont des matrices carrées de taille n.

Dans ce cours, nous nous limiterons au cas des matrices carrées de taille 2.
Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

A est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$, et son inverse est donné par

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

En effet, notons

$$B := \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}
A \cdot B &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
&\overset{(1)}{=} \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} ad - bc & a(-b) + ba \\ cd + d(-c) & -bc + da \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{ad-bc}{ad-bc} & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{ad-bc} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2
\end{aligned}$$

Et nous vérifions de la même manière que $B \cdot A = I_2$, ce qui nous donne bien que la matrice B est la matrice inverse de A sous la condition indispensable que $ad - bc \neq 0$.

Exemple 8 La matrice A suivante est inversible

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

puisque :

$$1 \cdot 3 - 4 \cdot (-1) = 3 + 4 = 7 \neq 0.$$

Sa matrice inverse est donnée par :

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{-4}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Et nous remarquons bien que :

$$\begin{aligned} A \cdot A^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-1) \cdot (-4) & 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \\ 4 \cdot 3 + 3 \cdot (-3) & 4 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2. \end{aligned}$$

Et de même :

$$A^{-1} \cdot A = I_2.$$

En revanche, la matrice B ci-dessous :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible :

$$1 \cdot (-2) - (-1) \cdot 2 = -2 + 2 = 0.$$

- FIN -